**Уравнения, содержащие неизвестное под знаком модуля, в курсе алгебры 8 класс (Мерзляк А.Г.)**

Модуль – одна из тех вещей, о которых вроде бы все слышали, но в действительности никто нормально не понимает.

1. **Определение модуля.**

Модулем числа $a$ называется расстояние от начала отсчета до точки, изображающей это число на координатной прямой.

***Модуль никогда не бывает отрицательным.***

$$\left|a\right|=\left\{\begin{array}{c}a, если a\geq 0\\-a,если a<0\end{array}\right.$$

 Кроме алгебраического определения, есть геометрическое.

 Пусть даны две точки $x\_{1}$ и $x\_{2}$ на прямой. В этом случае $\left|x\_{1}-x\_{2}\right|$ – это просто расстояние между указанными точками или длина отрезка, соединяющего эти точки.

 Модуль – это расстояние между точками на числовой прямой.

1. **Как решать уравнения с модулем?**

10. Начинаем с самых простых (по определению).

$$\begin{array}{c}\left|x\right|=4\\x=4, т.к. \left|4\right|=4 \\x=-4, т.к. \left|-4\right|=4\\Ответ: -4, 4\end{array}$$

20. Пусть под знаком модуля стоит функция.

а) $\left|x+4\right|=5$ или б) $\left|3x-7\right|=0$

Если $x+4\geq 0$, то $\left|x+4\right|=x+4$ и тогда уравнение имеет вид

$$\begin{array}{c}x+4=5\\x=1\end{array}$$

Если под знаком модуля стоит отрицательное число, т. е. $x+4<0$, то $\left|x+4\right|=-\left|x+4\right|=-x-4$ и тогда уравнение имеет вид:

$$\begin{array}{c}-x-4=5\\-x=9\\x=-9\\Ответ: -9; 1.\end{array}$$

В общем виде решение такого вида уравнений может быть записан так:

$$\left|f\left(x\right)\right|=a⇒f\left(x\right)=\pm a$$

30. Переменная содержится не только под знаком модуля, но и в правой части.

Рассмотрим пример: $\left|6x-2\right|=2x$. Оно отличается тем, что неизвестно каким числом будет $2x$.

а) Если правая часть будет отрицательной, то уравнение корней не имеет (модуль никогда не бывает отрицательным)

б) Если правая часть положительна (или равно 0), то действуем так же: раскрываем модуль со знаком “+” и отдельно со знаком “-“.

$$\left|6x-2\right|=2x⇒\left\{\begin{array}{c}6x-2=\pm 2x\\2x>0\end{array}\right.$$

$\left\{\begin{array}{c}6x-2=2x\\2x>0\end{array}\right.$ и $\left\{\begin{array}{c}6x-2=-2x\\2x>0\end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{c}x=0,5\\x>0\end{array}\right.$ $⇒$ $x=0,5$ и $\left\{\begin{array}{c}x=0,25\\x>0\end{array}\right.$ $⇒$ $x=0,25$

Ответ: 0,25; 0,5.

 №921

1) $\left|x^{2}-2x-6\right|=6$

$x^{2}-2x-6=-6$ и $x^{2}-2x-6=+6$

$x^{2}-2x=0$ $x^{2}-2x-12=0$

$x\_{1}=0;x\_{2}=2$ $D=k^{2}-ac$

 $D=\left(-1\right)^{2}-1⋅\left(-12\right)=13$

 $x\_{1,2}=1\pm \sqrt{13}$

 $x\_{1}=1+\sqrt{13};x\_{2}=1-\sqrt{13}$

Ответ: $1-\sqrt{13};0;2;1+\sqrt{13}$

40. Уравнения с двумя модулями.

$$\left|f\left(x\right)\right|=\left|g\left(x\right)\right|⇒f\left(x\right)=\pm g\left(x\right)$$

$$\left|3x+3\right|=\left|3x-7\right|⇒3x+3=\pm \left(3x-7\right)$$

а) $3x+3=3x-7$ б) $3x-3=-\left(3x-7\right)$

$3x-3x=-7-3$ $3x-3=-3x+7$

$Ox=-10⇒x=∅, корней нет$ $6x=10$

 $x=\frac{10}{6}$

 $x=1\frac{4}{6}$

 $x=1\frac{2}{3}$

№ 921

4) $|\left|x^{2}-6x-4\right|-3|=1$

Если $\left||x^{2}-6x-4|-3\right|>0$, то $\left||x^{2}-6x-4|-3\right|=\left|x^{2}-6x-4\right|-3$ и тогда уравнение имеет вид:

$$\left|x^{2}-6x-4\right|-3=1$$

$$\left|x^{2}-6x-4\right|=4$$

$x^{2}-6x-4=-4$ и $x^{2}-6x+4=+4$

$x^{2}-6x=0$ $x^{2}-6x-8=0$

$x\_{1}=0;x\_{2}=6$ $D=9+8=17$

 $x\_{1}=3+\sqrt{17};x\_{2}=3-\sqrt{17}$

Если $\left||x^{2}-6x-4|-3\right|<0$, то $\left||x^{2}-6x-4|-3\right|=-\left(\left|x^{2}-6x-4\right|-3\right)$ и тогда уравнение имеет вид:

$$\left|x^{2}-6x-4\right|-3=-1$$

$$\left|x^{2}-6x-4\right|=2$$

$x^{2}-6x-4=2$ и $x^{2}-6x-4=-2$

$x^{2}-6x-6=0$ $x^{2}-6x-2=0$

$D=9+6=15$ $D=9+2=11$

$x\_{1}=3+\sqrt{15}$ $x\_{1}=3+\sqrt{11}$

$x\_{2}=3-\sqrt{15}$ $x\_{2}=3-\sqrt{11}$

Ответ: $0;6;3+\sqrt{17};3-\sqrt{17};3+\sqrt{15};3-\sqrt{15};3+\sqrt{11};3-\sqrt{11}$