Приближенные числа

Пусть ***X*** – некоторая величина, истинное значение которой известно или неизвестно и равно **x\***. Число **x**, которое можно принять за значение величины ***X***, мы будем называть ее приближенным значением или просто приближенным числом. Число **x** называют приближенным значением по недостатку, если оно меньше истинного значения (**x < *x\**** ), и по избытку, если оно больше (**x > *x\**** ). Например, число 3,14 является приближенным значением числа *π* по недостатку, а 2,72 – приближенным значением числа *е*  (основание натурального логарифма) по избытку.

*Абсолютная погрешность* приближенного числа есть абсолютная величина разности между истинным значением величины и данным ее приближенным значением.

**Δx =**|***x*\* – x**|

Поскольку истинное значение величины обычно остается неизвестным, неизвестной остается также и абсолютная погрешность. Вместо нее приходится рассматривать *оценку* абсолютной погрешности, так называемою *предельную абсолютную погрешность*, которая означает число, не меньшее абсолютной погрешности (далее, в том случае, если это не принципиально, будем под абсолютной погрешностью понимать именно предельную абсолютную погрешность).

Абсолютная погрешность приближенного числа не в полной мере характеризует его точность. Действительно, погрешность в 0,1 г слишком велика при взвешивании реактивов для проведения микро-синтеза, допустима при взвешивании 100 г колбасы,  и не может быть замечена при измерении массы, например, железнодорожного вагона. Более информативным показателем точности приближенного числа является его *относительная погрешность*.

*Относительной погрешностью* ***δx*** приближенного значения величины ***X*** называют абсолютную величину отношения его абсолютной погрешности к истинному значению этой величины. Часто эту относительную погрешность выражают в процентах. C учетом положительности абсолютной погрешности можно записать:

***δx*** =**Δx**/ |***x\****|

Ввиду того, что фактически вместо абсолютной погрешности приходится рассматривать предельную, относительную погрешность также заменяют *предельной относительной погрешностью*, которая означает число, не меньшее относительной погрешности. Более того, при отыскании предельной относительной погрешности приходится заменять неизвестное истинное значение величины ***x\****приближенным – ***x***. Последняя замена обычно не отражается на величине относительной погрешности ввиду близости этих значений и малости абсолютной погрешности.

***δx*** =**Δx**/ |***x***|

Например, для приближенного значения *π* = 3,14 предельная абсолютная погрешность составляет 0,0016, а относительная – 0,00051 или 0,051%. Выражение относительной погрешности в процентах иногда называют процентной погрешностью.

Правила записи приближенных чисел

Любое приближенное число характеризуется своим значением и погрешностью. Поэтому при записи приближенных чисел, помимо их значений, обязательно, в явном или неявном виде, должна быть указана соответствующая погрешность.

*Значащими цифрами* числа называют все его цифры, начиная с первой ненулевой слева. Например, в числе 0,002375 значащими являются 4 цифры - 2, 3, 7 и 5. В числе 560700,0 значащих цифр семь (все цифры являются значащими).

Значащая цифра в записи приближенного числа *верна (в узком смысле)*, если абсолютная погрешность числа  меньше или равна пяти единицам разряда, следующего за этой цифрой (или, что то же самое, если абсолютная погрешность числа меньше или равна половине единицы разряда, соответствующего этой цифре).

Значащая цифра в записи приближенного числа *верна* *в широком смысле*, если абсолютная погрешность числа меньше или равна единице разряда, соответствующего этой цифре.

Цифры в записи числа, следующие за верными, называются *сомнительными*. Таким образом, очевидно, что зная абсолютную погрешность числа можно все его цифры разделить на верные (стоящие слева) и сомнительные (стоящие справа) от определенной границы. Поэтому проверку значащих цифр на верность начинаем с самой левой, продвигаясь последовательно по значащим цифрам слева направо, до обнаружения первой сомнительной. Все числа справа от первой сомнительной так же будут сомнительными.

**Пример.** Пусть число  x = 0,002375 характеризуется предельной абсолютной погрешностью Δx = 0,00003.  Определим верные и сомнительные цифры этого числа в узком смысле. Берем сначала первую значащую цифру 2 - эта цифра из разряда тысячных долей, поэтому абсолютную погрешность числа мы будем сравнивать с 5 десятитысячными (0,0005). Так как неравенство 0,0005 > Δx = 0,00003 выполняется, то цифра 2 является верной. Следующая значащая цифра - 3 - стоит в разряде десятитысячных, поэтому сравнение будем проводить с 5 стотысячными (0,00005). Выполнение неравенства 0,00005 > Δx = 0,00003 так же указывает, что цифра 3 верна. Для цифры 7 из разряда стотысячных долей неравенство ~~0,000005 > Δx = 0,00003~~ уже не выполняется и, таким образом, цифра 7 является сомнительной, как является сомнительной и последняя значащая цифра 5.

Алгоритм определения верных **в узком смысле** цифр можно проиллюстрировать с помощью таблицы:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  Цифра |  Разряд |  Половина разряда | Cравнение |   Δx   |  Результат проверки |
|  2 |  0,001 |  0,0005 |  >  |  0,00003 |  верна |
|  3 |  0,0001 |  0,00005 |  >  |  0,00003 |  верна |
|  7 |  0,00001 |  0,000005 |  <  |  0,00003 |  сомнительна |
|  5 |  0,000001 |  0,0000005 |  <  |  0,00003 |  сомнительна |

 При определении верных и сомнительных цифр числа **в широком смысле** сравнение абсолютной погрешности числа проводится с единицей разряда, в котором стоит проверяемая цифра. Цифра 2 (разряд тысячных долей) верна в широком смысле, так как 0,001 > Δx = 0,00003. Цифра 3 (разряд десятитысячных долей) тоже верна (0,0001 > Δx = 0,00003). Цифры 7 (0,00001 <  Δx = 0,00003) и 5 (0,000001 < Δx = 0,00003) сомнительны.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  Цифра |  Разряд | Cравнение |   Δx   |  Результат проверки |
|  2 |  0,001 |  >  |  0,00003 |  верна |
|  3 |  0,0001 |  >  |  0,00003 |  верна |
|  7 |  0,00001 |  <  |  0,00003 |  сомнительна |
|  5 |  0,000001 |  <  |  0,00003 |  сомнительна |

**Пример.** Пусть x = 53461,2 характеризуется абсолютной погрешностью Δx = 60. Применяя тот же алгоритм, легко определить, что граница между верными и сомнительными значащими цифрами числа в узком смысле будет проходить между цифрами 3 и 4, то есть в данном приближенном числе в узком смысле верны цифры 5 и 3, цифры 4, 6, 1 и 2 сомнительны. Действительно, для цифры 3 (разряд тысяч) выполняется неравенство 500 > Δx = 60 и она верна. а для цифры 4 (разряд сотен) уже нет - 50 < Δx = 60 и она уже сомнительна, как и все цифры, стоящие справа от нее.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  Цифра |  Разряд |  Половина разряда | Cравнение |   Δx   |  Результат проверки |
|  5 |  10000 |  5000 |  >  |  60 |  верна |
|  3 |  1000 |  500 |  >  |  60 |  верна |
|  4 |  100 |  50 |  <  |  60 |  сомнительна |
|  6 |  10 |  5 |  <  |  60 |  сомнительна |
|  1 |  1 |  0,5 |  <  |  60 |  сомнительна |
|  6 |  0,1 |  0,05 |  <  |  60 |  сомнительна |

 В тоже время в **широком смысле**верными будут цифры 5, 3 и 4, а 6, 1 и 2 - сомнительными.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  Цифра |  Разряд | Cравнение |   Δx   |  Результат проверки |
|  5 |  10000 |  >  |  60 |  верна |
|  3 |  1000 |  >  |  60 |  верна |
|  4 |  100 |  >  |  60  |  верна |
|  6 |  10 |  <  |  60 |  сомнительна |
|  1 |  1 |  <  |  60 |  сомнительна |
|  6 |  0,1 |  <  |  60 |  сомнительна |

При *неявной* записи приближенных чисел указывается только значение числа, которое принято записывать таким образом, чтобы форма записи указывала на его предельную абсолютную погрешность, которая не должна превосходить половины единицы последнего (крайнего правого) разряда, сохраняемого при записи. Например,  запись x = 3,1416 означает, что абсолютная погрешность этого приближенного числа не превосходит 0,00005 (крайний справа разряд соответствует одной десятитысячной, поэтому  Δx = 0,0001/2=0,00005). Аналогично, для числа 370 абсолютная погрешность не превосходит 0,5. Если это число имеет большую точность, например если абсолютная погрешность меньше 0,05, то следует писать уже не 370, а 370,0. Таким образом, приближенные числа, записанные как   37•101; 370; 370,0; 370,00 хоть и имеют одинаковое значение, но характеризуются различной степенью точности: их *предельные абсолютные погрешности* составляют 5; 0,5; 0,05 и 0,005, соответственно. Лекго убедиться, что в неявной форме записи все значащие цифры приближенного числа являются *верными в узком смысле*.

Для больших чисел абсолютные погрешности могут иметь порядок единиц, десятков, сотен и т. п. Сохраняя и для таких чисел упомянутое выше правило, не следует выписывать все его цифры. Так, например, число двести семьдесят пять тысяч с абсолютной погрешностью, не превосходящей 500 нельзя записывать как 275000, ибо такая запись означала бы предельную абсолютную погрешность 0,5. В таком случае следует использовать запись чисел в**нормализованном** или **стандартном** виде как  M•10n (где M - это мантисса, которую выписывают с необходимым количеством значащих цифр, а n - целое число). Разница между ними заключается в выборе степени n. В **нормализованном** виде значение мантиссы должно подчиняться неравенству 0,1 <= M < 1, то есть целая часть мантиссы равна нулю, а первая значащая цифра стоит в разряде десятых долей. В **стандартном** виде мантисса должна удовлетворять неравенству 1 <= M < 10, то есть целая часть мантиссы записывается одной цифрой (которая не ноль). Например, 0,275•106 и 2,75•105 - нормализованная и стандартная форма числа двести семьдесят пять тысяч с предельной абсолютной погрешностью 500.

*В программе Microsoft Excel стандартная форма записи соответствует****экспоненциальному****формату ячейки. Число 275000 при этом форматируется как 2,75E+05  (число десятичных знаков в мантиссе можно менять, в примере оно равно двум).*

 При явной форме записи вместе со значением приближенного числа указывается и значение погрешности (пределеной абсолютной или предельной относительной) в следующем виде:

х  ±  Δx     или     (1 ± δх) • х

При этом следуют правилам:

1. *Абсолютная погрешность приближенного числа* показывается одной значащей цифрой (если первая цифра 2 и более) или двумя значащими цифрами (если первая из них - это цифра 1).

2. *Значение приближенного числа*округляется до того же десятичного разряда, которым заканчивается округленое значение абсолютной погрешности.

Ряд примеров итоговой формы явной записи приближенных чисел приведены в таблице ниже.

|  |  |
| --- | --- |
| **Предварительная запись** | **Итоговая форма записи** |
|  U = 5281,12 ± 1524 мВ |  U = (5,3 ± 1,5)•103 мВ |
|  С = (0,418 ± 0,042) моль/л |   С = (0,42 ± 0,04) моль/л |
|  m = (0,03643 ± 0,00021) г |  m = (3,64 ± 0,02)•10-2 г  илиm = 0,0364 ± 0,0002 г  |
|  f = (125,3 ± 41) Гц |  f = (1,3 ± 0,4)•102 Гц |
|  t = (872,9 ± 11,6)•10-1 мс |  t = (87,3 ± 1,2) мс |

При проведении вычислений рекомендуется сохранять максимальное число значащих цифр для всех промежуточных результатов. Округляется только конечный результат в соответствии с оцененной предельной абсолютной погрешностью.

Абсолютная и относительная погрешность вычисления
функции одной переменной

Важной проблемой при проведении вычислений с использованием приближенных чисел является вопрос о влиянии погрешности исходных данных на погрешность полученного результата. Установим основные закономерности распространения абсолютной и относительной погрешности. Для начала рассмотрим случай вычисления функции одного аргумента, который является приближенным числом. Решение этих задач дается следующей основной теоремой.

***Теорема.****Предельная абсолютная погрешность вычисления функции равна произведению абсолютной величины ее производной на предельную абсолютную погрешность аргумента.*

**Доказательство.** Пусть число **x** является приближенным значением величины **X** с абсолютной погрешностью **Δx**.

, или можно записать , если считать, что величина **Δx** является знаковой, то есть, может быть как положительным, так и отрицательным числом, потому что **x** может быть приближением как по недостатку, так и по избытку. Обозначим абсолютную погрешность функции через  **Δy**

****

Ввиду малости **Δx** мы можем заменить приращение функции ее дифференциалом. Тогда получим

, откуда

, что и требовалось доказать.

Рассмотрим *относительную погрешность* вычисления функции одной переменной. Обозначим предельную относительную погрешность аргумента через δx, а функции – δy, тогда, учитывая, что  , получим



Так как по правилам дифференцирования сложной функции

 , то полученное выражение можно записать так:



В таком виде выражение удобно для приложения к легко логарифмируемым функциям.

Рассмотрим, например, погрешность вычисления степенной функции:



, т. е. предельная относительная погрешность степени равна предельной относительной погрешности основания, умноженной на абсолютную величину показателя степени.

Абсолютная и относительная погрешность вычисления функции
нескольких переменных

Полученные результаты легко обобщаются на случай функций нескольких аргументов









*Абсолютная погрешность результата вычисления функции нескольких приближенных чисел равна сумме произведений модуля частной производной функции на абсолютную погрешность приближенного числа.*

Для относительной погрешности вычисления функции нескольких приближенных чисел получим выражение, так же аналогичное случаю [функции одной переменной](https://www.physchem.chimfak.sfedu.ru/Source/NumMethods/Approx_num.html#A_O_F1):

 

Абсолютная и относительная погрешность вычисления суммы и разности приближенных чисел

Рассмотрим   несколько   примеров   функций частного вида:



  , таким образом,   

***Предельная абсолютная погрешность****как****суммы****, так и****разности****нескольких****приближенных чисел****равна сумме предельных абсолютных погрешностей слагаемых.*

При определении *относительной погрешности* суммы и разности результаты будут различны.

Для суммы **n**положительных чисел относительная погрешность будет равна


*Как видно, величина относительной погрешности в этом случае зависит не только от погрешностей слагаемых, но и от величины приближенных чисел. Можно воспользоваться следующими приемом для оценки границ относительной погрешности суммы.*

Выберем из всех относительных погрешностей наибольшую 

и тогда можно записать

Таким образом, предельная относительная погрешность суммы положительных чисел не превосходит максимальной относительной погрешности слагаемых, т.е. является оценкой сверху относительной погрешности суммы приближенных чисел.

Аналогично, если выбрать наименьшую из относительных погрешностей слагаемых, можно показать, что она будет являться оценкой снизу относительной погрешности суммы приближенных чисел.

Рассмотрим далее относительную погрешность вычисления разности двух приближенных чисел.



Как видно, из полученного результата, относительная погрешность разности может очень существенно (в пределе неограниченно) возрастать при вычитании двух близких по значению чисел



*Пример*

Рассмотрим вычисление массы образца как разности масс сосуда с образцом (x1) и пустого сосуда  (x2)

       

Относительные погрешности обоих масс примерно одинаковы и равны 0,04%.

 Найдем массу навески как разность двух чисел



Абсолютная погрешность   Таким образом, относительная погрешность результата составит

, что в 250 (!!!!) раз выше относительной погрешности исходных чисел.

Абсолютная и относительная погрешность вычисления
произведения и частного приближенных чисел

Рассмотрим произведение нескольких приближенных чисел.



Воспользуемся общей [формулой для относительной погрешности](https://www.physchem.chimfak.sfedu.ru/Source/NumMethods/Approx_num.html#Otnos_pogr_mnogo), в логарифмическом виде, полученной ранее. Для этого найдем натуральный логарифм функции и, затем, частные производные логарифма функции по всем ***xi***.

,   для всех i   имеем ,

Поэтому, окончательно, получим:



*То есть, предельная относительная погрешность произведения приближенных чисел равна сумме предельных относительных погрешностей сомножителей.*

Для частного двух чисел вычисления будут аналогичными.



Находим натуральный логарифм и его частные производные

,

, 



следовательно, *предельная относительная погрешность* частного равна сумме предельных относительных погрешностей делимого и делителя.

*Пример.* При определении силы сопротивления квадратной пластинки, поставленной перпендикулярно к воздушному потоку, пользуются формулой



где *Ρ* — сила сопротивления, *S* — площадь пластинки, *ν* — скорость воздушного потока и *k* — коэффициент про­порциональности. Зная, что величина *k* определена с относительной погрешностью 5%, *S* и *v* — с относительными погрешностями 1%, определим относительную погрешность величины Р.

Согласно выражению для предельной относительной погрешности произведения имеем

, откуда 

Итак, для оценки погрешности мы получили следующие простые правила:

При сложении и вычитании *абсолютные*погрешности складываются

При умножении и делении *относительные* погрешности складываются;

При возведении в степень относительные погрешности умножаются на абсолютную величину показателя степени.

При отыскании значения функции абсолютная погрешность функции равна произведению абсолютной погрешности аргумента на абсолютную  величину производной

В заключение отметим, что при вычислении значений функции абсолютная погрешность может существенным образом зависеть от того, каким образом записана расчетная формула и какова последовательность операций при вычислении этой формулы. Последовательность расчетов надо стараться преобразовывать к такому виду, чтобы в них не было вычитания близких величин; последнее может привести к большой потере точности и большим относительным ошибкам.