**ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ В КООРДИНАТАХ**

**Сотникова Н.С.**

г. Санкт –Петербург 2019

**Введение**

В данной статье ведется разговор о применении *координатного метода* при изучении стереометрии, о его роли в повышении и развитии математической культуры учащихся общеобразовательной и профильной школы - будущих студентов вузов физико-математической и естественнонаучной направленности.

Заметим, что решение многих стереометрических задач координатным методом значительно проще их решения средствами элементарной геометрии, при этом можно обойтись без дополнительных построений, которые становятся необходимыми при иных методах решения. Кроме того, применение координатного метода при решении геометрических задач способствует поиску интересных обобщений, которые могут возникнуть при анализе полученных решений.

В данной статье показывается, как *с помощью координатного метода можно эффективно решать многие метрические задачи стереометрии*, в том числе задачи, которые предлагаются и, по всей вероятности, будут предлагаться в ЕГЭ.

Для решения задач на взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве, на вычисление расстояний и углов между ними используется следующий учебный материал:

*Ах* + *Ву* + *Cz* + *D* = 0 - общее уравнение плоскости, где вектор  является вектором ее нормали;

*А*(*х* - *х*0) + *В*(*у* - *у*0) + *C*(*z* - *z*0) = 0 - уравнении плоскости, проходящей через точку (*х*0; *у*0; *z*0) перпендикулярно вектору 

*x* = *x*0 + *a*1*t*, *y* = *y*0 + *a*2*t*, *z* = *z*0 + *a*3*t* - параметрические уравнения прямой, проходящей через точку (*х*0; *у*0; *z*0) параллельно вектору 

Также используются формулы:

)  -длина вектора 

)  *-* длина вектора  или расстояние между точками *A*(*x*1; *y*1; *z*1) и *B*( *x*2; *y*2; *z*2);

)  - расстояние от точки *М*(*х*0; *у*0; *z*0) до плоскости : *Ах* + *Вy* + *Cz* + *D* = 0;

) -скалярное произведение векторов  

) *x*1*x*2 + *y*1*y*2 + *z*1*z*2 = 0   -признак перпендикулярности векторов  и 

) угол  между векторами  и  находится с помощью формулы



**Расстояния в пространстве**

**Расстояние от точки до прямой**

Координатным методом эту задачу можно решать таким образом. Составить уравнение плоскости , проходящей через точку *А* перпендикулярно данной прямой *m*. Затем решить систему, состоящую из этого уравнения и уравнений прямой *m*. Решением этой системы являются координаты точки *K* =  ∩ *m*. Тогда расстояние между точками *А* и *K* равно искомому расстоянию от точки *А* до прямой *m*. Продемонстрируем сказанное на решении следующей задачи.

**Задача.** Найдите расстояние от точки *А*(7; 9; 7) до прямой *m*, заданной уравнениями: *x* = 2 + 4*t*, *y* = 1 + 3*t*, *z* = 2*t*.

*Решение.* Так как   *m*, то направляющий вектор  прямой *m* является вектором нормали для плоскости , проходящей через точку *А*(7; 9; 7). Значит, уравнение этой плоскости имеет вид:

(*х* - 7) + 3(*у* - 9) + 2(*z* - 7) = 0  4*х* + 3*у* + 2*z* - 69 = 0.

Далее находим координаты точки *K* =  ∩ *m*, решая систему уравнений



После подстановки в первое уравнение системы вместо *x*, *y*, *z* их выражения через *t* получаем: 4(2 + 4*t*) + 3(1 + 3*t*) +2 ∙ 2*t* = 69, откуда  Найдем координаты точки *K*: *х* = 2 + 4 ∙ 2 = 10; *у* = 1 + 3 ∙ 2 = 7; *z* = 2 ∙ 2 = 4. Значит,  - искомое расстояние от точки *А* до прямой *m*.

*Ответ*: 

**Задача 1.** *А*…*D*1 - единичный куб. Найдите расстояние:

а) от точки *А*1 до прямой *В*1*D*;

б) от точки *В* до прямой *А*1*С*;

в) от точки *А*1 до прямой *D*1*В*;

г) от точки *С* до прямой *D*1*В*.



*Решение*. а) Введем систему координат *Охуz* так, что *В*(1; 1; 0), *А*1(1; 0; 1), *С*1(0; 1; 1), *D*(0; 0; 0), *В*1(1; 1; 1).

С помощью теоремы о трех перпендикулярах докажем, что *В*1*D*  (*А*1*ВС*1). Обозначим *Т* = *В*1*D* ∩ (*А*1*ВС*1) и найдем координаты точки *Т*.

Вектор  является направляющим для прямой *В*1*D* и вектором нормали для плоскости *А*1*ВС*1. Поэтому прямая *В*1*D* может быть задана системой параметрических уравнений *х* = *t*, *y* = *t*, *z* = *t*, а плоскость *А*1*ВС*1 - уравнением:

(*х* - 1) + (*у* - 1) + (*z* - 0) = 0  *х* + *y* + *z* - 2 = 0.

Решая систему, составленную из уравнений прямой *В*1*D* и плоскости *А*1*ВС*1, находим:

*t* + *t* + *t* - 2 = 0  

откуда точка *Т* имеет координаты  Тогда



Это означает, что 

Аналогично решаются другие задачи.

*Ответ*: а)  б)  в)  г) 

**Задача 2.** *A*…*F*1 - правильная шестиугольная призма, все ребра которой равны 1. Найдите расстояние от точки *В* до прямой *СD*1.



*Решение.* Составим уравнение плоскости , проходящей через точку *В* перпендикулярно прямой *СD*1.

Во введенной системе координат точки *В*, *С* и *D*1 имеют координаты:

 *С*(0; 1; 0), 

В качестве вектора нормали плоскости  примем вектор 

Тогда плоскость  задается уравнением:

 

Обозначим *Т* =  Ж *СD*1, тогда *ВТ* = (*В*; *D*1;*C*). Координаты точки *Т* найдем, решив систему, составленную из уравнений плоскости и прямой *CD*1:

 *t*  ***R***.

Получаем:

  8*t* - 1 = 0  

Отсюда координаты точки *T*:    Тогда





*Ответ*: 

**Задачи для самостоятельного решения**

**.** В системе координат *Oxyz* расположен куб *A*…*D*1 так, что *D*(1; 0; 0), *C*1(0; 0; 1), *B*(0; 1; 0), *C*(0; 0; 0). Постройте этот куб. Координатным методом найдите расстояние до прямой *AC*1 от точки:

а) *A*1; б) *B*1; в) *C*.

**4.** Правильная шестиугольная призма *A*…*F*1, все ребра которой равны 1, расположена в системе координат *Oxyz* так, что центр ее основания совпадает с началом координат, а вершины *А*, *В*, *F*, *F*1 имеют координаты:   *F*(0; -1; 0), *F*1(0; -1; 1). Постройте эту призму и координатным методом найдите расстояние от вершины *В* до прямой:

а) *E*1*F*; б) *D*1*F*1; в) *С*1*D*1; г) *АD*1.

*Ответы*: **3.** а)  б)  в)  **4.** а)  б)  в)  г) 

**Расстояние от точки до плоскости**

Расстояние от точки *М*(*х*0; *у*0; *z*0) до плоскости : *Ах* + *Вy* + *Cz* + *D* = 0, находится по формуле



**Задача 5.** Куб *A*…*D*1 в системе координат *Oxyz* расположен так, что *A*(1; 0; 0), *B*1(1; 1; 1), *C*(0; 1; 0), *D*(0; 0; 0). Постройте изображение этого куба и координатным методом найдите отношение, в котором плоскость *А*1*ВС*1 делит диагональ *В*1*D* куба, считая от вершины *В*1.



*Решение*. На рисунке изображен данный куб относительно системы координат *Охуz*. Остальные вершины куба имеют координаты: *B*(1; 1; 0), *B*1(1; 1; 1), *А*1(1; 0; 1), *С*1(0; 1; 1), *D*1(0; 0; 1). Теперь рассмотрим решение задачи.

Обозначим  = (*A*1*BС*1). Плоскость *А*1*ВС*1 задается уравнением *х* + *y* + *z* - 2 = 0 (см. задачу 1). Тогда





Значит, 

Можно иначе решить эту задачу.

Пусть *Т* =  ∩ *В*1*D*. Решая систему уравнений

 *t*  ***R***,

составленную из уравнений прямой *СD*1 и плоскости , находим:  (см. задачу 1).

Тогда



 поэтому 

*Ответ*: 1 : 2.

**Задача 6.** Правильная шестиугольная призма *A*…*F*1, все ребра которой равны 1, расположена в системе координат *Oxyz* так, что центр ее основания совпадает с началом координат, а вершины *В*, *C*, *D*, *C*1 имеют координаты:  *С*(0; 1; 0),  *С*1(0; 1; 1). Постройте эту призму и координатным методом найдите расстояние до плоскости *AF*1*D* от точек:

а) *F*; б) *В*1.



*Решение*. а) Если плоскость : *ах* + *by* + *cz* + *d* = 0, проходит через данную точку *М*(*х*0; *у*0; *z*0), то верно равенство *ах*0 + *by*0 + *cz*0 + *d* = 0. Воспользуемся этим утверждением при составлении уравнения плоскости  = (*AF*1*D*).

Пусть *ах* + *by* + *cz* + *d* = 0 - искомое уравнение плоскости . На рисунке изображена данная призма относительно системы координат *Охуz*. В этой системе координат имеем:  *F*(0; -1; 0), *F*1(0; -1; 1), 

Плоскость  = (*AF*1*D*) проходит через начало координат, значит, *d* = 0. Далее имеем:

  

Решая систему из уравнений, находим:  Полагая  получаем: *b = c* = 3, и уравнение плоскости  имеет вид:

  

Теперь находим искомые расстояния (*F*; ) и (*В*1; ):





*Замечание.* При нахождении расстояния от точки до плоскости координатным методом не требуются аргументированные обоснования построения перпендикуляра из данной точки на данную плоскость. Но если *FK* B (*AF*1*D*) («виртуально»), *K*  (*AF*1*D*) (см. рис. 4), то *FK* =  (*F*; ). На этом рисунке перпендикуляр из вершины *В*1 на плоскость *AF*1*D* не изображен.

*Ответ*:  

**Задачи для самостоятельного решения**

**.** В системе координат *Oxyz* расположен куб *A*…*D*1 так, что *C*(1; 0; 0), *B*1(0; 0; 1), *A*(0; 1; 0), *B*(0; 0; 0). Постройте этот куб. Координатным методом найдите расстояние до плоскости *А*1*BC*1 от точки:

а) *B*1; б) *C*; в) *D*1; г) *D*.

**8.** Правильная шестиугольная призма *A*…*F*1, все ребра которой равны 1, расположена в системе координат *Oxyz* так, что центр ее основания совпадает с началом координат, а вершины *В*, *C*, *D*, *C*1 имеют координаты:  *С*(0; 1; 0),  *С*1(0; 1; 1). Постройте эту призму и координатным методом найдите:

а) расстояние от вершины *А*1 до плоскости *ВСС*1;

б) от вершин *А*1 и *D*1 до плоскости *АС*1*Е*1;

в) от вершин *В* и *F*1 до плоскости *АВ*1*D*.

*Ответы*: **7.** а)  б)  в)  г)  **8.** а)  б)  в)  и 

**Расстояние между скрещивающимися прямыми**

Используем следующий факт: *расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию от любой точкой одной прямой до плоскости, проходящей через вторую прямую параллельно первой прямой.*

**Задача 9.** Единичный куб *A*…*D*1 изображен в системе координат *Oxyz*. Найдите расстояние между прямыми, где *М* - середина ребра *АВ*:

а) *AB*1 и *A*1*C*1; б) *BD*1 и *B*1*C*; в) *BD* и *В*1*М*.



*Решение*. Из рисунка 5 следует: точка *D*(0; 0; 0) - начало координат, точки *A*(1; 0; 0) и *C*(0; 1; 0) - на осях *Ох* и *Оу* соответственно; остальные вершины имеют координаты: *B*(1; 1; 0), *А*1(1; 0; 1), *С*1(0; 1; 1), *D*1(0; 0; 1), *В*1(1; 1; 1).

а) Найдем расстояние (*АВ*1; *А*1*С*1). Для этого составим уравнение плоскости , проходящей через прямую *АВ*1 параллельно прямой *А*1*С*1.

Векторы  и  - направляющие для прямых *AB*1 и *A*1*C*1 соответственно. Тогда эти прямые задаются соответственно уравнениями:

 *t*  ***R*** и  *t*  ***R***.

Вектор  - вектор нормали плоскости - перпендикулярен векторам  и  Найдем координаты этого вектора. Имеем:

    *a* = *b* = -*c*.

Пусть, не нарушая общности, *c* = -1, тогда *a = b* = 1. Имеем:  Получаем уравнение плоскости ** в виде:

∙ (*х* - 1) + 1 ∙ (*y -* 0) - 1 ∙ (*z* - 0) = 0  *x* + *y* - *z* - 1 = 0.

Теперь находим:



Аналогично находятся расстояния

 и 

**Задача 10.** Правильная шестиугольная призма *A*…*F*1, все ребра которой равны 1, изображена в системе координат *Oxyz*. Найдите расстояние между прямыми:

а) *B*1*C* и *A*1*B*; б) *B*1*C* и *BЕ*1.



*Решение.* а) Найдем расстояние между прямыми *B*1*C* и *A*1*B*.

Во введенной системе координат *Оxyz* имеем:

 *C*(0; 1; 0),  

Для нахождения искомого расстояния составим уравнение плоскости , проходящей через прямую *B*1*C* параллельно прямой *A*1*B*.

Вектор  - вектор нормали плоскости  - перпендикулярен направляющим векторам  и  прямых *B*1*C* и *A*1*B*. Найдем его координаты.

Имеем:

     

Полагая получаем  и плоскость ** имеет уравнение:

  

Теперь находим:



б) Для нахождения расстояния (*BE*1; *B*1*C*) составим уравнение плоскости , проходящей через прямую *B*1*C* параллельно прямой *BЕ*1.

Во введенной системе координат точка *E* (см. рис.) имеет координаты  а вектор  - координаты 

Вектор  - вектор нормали плоскости  - перпендикулярен направляющим векторам  и  прямых *B*1*C* и *BЕ*1 соответственно. Найдем его координаты. Имеем:

    

Полагая получаем:  Тогда плоскость , проходящая через точку C(0; 1; 0) перпендикулярно вектору  имеет уравнение:

  

Теперь находим:



*Ответ*:  б) 

В заключение этого раздела рассмотрим решение следующей задачи геометрическим методом и методом координат.

**Задача 11.** Точка *K* - середина ребра *ВС* куба *A*…*D*1, ребро которого равно 8. Какую наименьшую площадь может иметь треугольник *АСМ*, где *М* - точка прямой *С*1*K*?



*Решение.* а) *Геометрический метод*. Площадь треугольника *АСМ* с постоянным основанием *АС* достигает минимального значения при минимальной высоте *МР* (*Р*  *AC*), проведенной из точки *М*  *KС*1 на *АС*. Это означает, что отрезок *МР* - кратчайшее расстояние между прямыми *АС* и *С*1*K*, то есть *МР* - общий перпендикуляр скрещивающихся прямых *АС* и *С*1*K* (см. рис.).

Найдем длину *МР*. Для этого проведем плоскость  = (*BDD*1). Она перпендикулярна прямой *АС* (почему?) и плоскости *АСС*1 (почему?), причем (*BDD*1)∩ *АС* = *О* = *АС* ∩ *ВD*, (*BDD*1)∩ (*АСС*1) = *ОО*1, где *ОО*1  (*АВС*) (почему?).

Спроектируем на плоскость  прямую *С*1*K*, для чего проведем прямую *KТ*  *АС*, ** *ВD*. Получаем: *О*1*Т* - ортогональная проекция прямой *С*1*K* на плоскость . Тогда (*AС*; *С*1*K*) = ρ(*О*; *О*1*Т*) = *ОН*, где *ОН* - высота прямоугольного треугольника *ОО*1*Т*.

Тогда  Так как *KТ*  *АС*, *K* - середина *ВС*, то *Т* - середина *ОВ* (по теореме Фалеса), откуда  Учитывая, что *ОО*1 = *АА*1 = 8, находим



Значит, 

Проведем *НМ*  *АС*, *М*  *KС*1 и *МР*  *ОН*, *Р*  *АС*. Тогда *МР* = *ОН*, *МР*  *АС*, значит, *МР* - высота треугольника *АСМ*. Тогда минимальная площадь треугольника *АСМ* равна



*Ответ*: 

б) *Координатный метод.* Пусть треугольник *АСМ* - искомый, то есть имеет наименьшую площадь; длина его высоты *МР* равна длине общего перпендикуляра скрещивающихся прямых *АС* и *С*1*K* и равна расстоянию от любой точки прямой *АС* до плоскости , проходящей через прямую *С*1*K* параллельно прямой *АС*. Для нахождения этого расстояния составим уравнение плоскости 

Введем систему координат (см. рис.).



Имеем: *А*(8; 0; 0), *С*(0; 8; 0), *K*(4; 8; 0), *С*1(0; 8; 8).

Вектор  - вектор нормали плоскости  - перпендикулярен направляющим векторам   прямых *АC* и *С*1*K* соответственно.

Найдем его координаты. Имеем:

   

Полагая *с* = 1, получаем: Тогда плоскость  определяется своим вектором нормали  и точкой *С*1. Ее уравнение имеет вид:

(*х* - 0) + 2(*у* - 8) + (*z* - 8) = 0  2*х* + 2*у* + *z* - 24= 0.

Значит,



Учитывая, что  находим (в кв. ед.):



*Ответ*:  кв. ед.

*Замечание.* Анализируя сравнительные решения этой задачи синтетическим (геометрическим) и координатным методами, можно увидеть простоту ее решения координатным методом.

**Задачи для самостоятельного решения**

**.** В системе координат *Oxyz* расположен куб *A*…*D*1 так, что *B*(1; 0; 0), *C*(1; 1; 1), *D*(0; 1; 0), *A*(0; 0; 0). Постройте этот куб. Координатным методом найдите расстояние между прямыми, где *М* - середина ребра *АD*:

а) *A*1*C*1 и *B*1*С*; б) *АС*1 и *B*1*C*; в) *BD* и *А*1*M*.

**13.** Правильная шестиугольная призма *A*…*F*1, все ребра которой равны 1, расположена в системе координат *Oxyz* так, что центр ее основания совпадает с началом координат, а вершины *А*1, *B*, *C*, *B*1 имеют координаты:   *C*(0; 1; 0),  Постройте эту призму и найдите координатным методом расстояние между прямыми:

а) *А*1*В* и *С*1*D*; б) *А*1*В* и *Е*1*F*; в) *А*1*В* и *АF*1; г) *А*1*В* и *В*1*D*.

*Ответы*: **12.** а)  б)  в)  **13.** а)  б)  в)  г) 

**Углы в пространстве**

**Угол между двумя прямыми**

стереометрия пространство прямая плоскость

Если прямые *a* и *b*, имеющие направляющие векторы соответственно  и  проходят соответственно через точки *M*1(*x*1; *y*1; *z*1) и *M*2(*x*2; *y*2; *z*2), то эти прямые задаются параметрическими уравнениями соответственно:

*а*: *x* = *x*1 + *a*1*t*, *y* = *y*1 + *a*2*t*, *z* = *z*1 + *a*3*t*,

*b*: *x* = *x*2 + *b*1*t*, *y* = *y*2 + *b*2*t*, *z* = *z*2 + *b*3*t*, *t* ***R****.*

Обозначив = F (*a*; *b*),  получим либо  , либо  = 180. Учитывая, что  [0; 90], получаем cos  = | cos  |. Это означает, что косинус угла между прямыми можно найди с помощью формулы  или в координатном виде:





**Задача 14.**В системе координат *Oxyz* расположен куб *A*…*D*1 так, что *В*(0; 0; 1), *A*(1; 0; 1), *C*(0; 1; 1), *D*1(1; 1; 0). Постройте этот куб. Координатным методом найдите угол между прямыми:

а) *A*1*B* и *AC*; б) *D*1*B* и *B*1*C*; в) *AC*1 и *D*1*B*.



*Решение*. На рисунке изображен данный куб в системе координат *О*ху*z*: точка *B*1(0; 0; 0) - начало координат, точки *A*1(1; 0; 0) и *C*1(0; 1; 0) лежат на осях *Ох* и *Оу* соответственно. Точки *A*1, *D*, *C*1, *B*1 имеют координаты: *A*1(1; 0; 0), *D*(1; 1; 1), *C*1(0; 1; 0), *B*1(0; 0; 0).

а) Найдем угол  = F (*A*1*B*; *AC*).

Направляющими векторами прямых *A*1*B* и *AC* являются векторы и  соответственно. Тогда:

  = 60.

в) Обозначим  = ∠ (*AC*1; *D*1*B*).

Направляющими векторами прямых *AC*1 и *D*1*B* являются векторы  и  соответственно. Тогда:

  

Аналогично находится угол между прямыми *D*1*B* и *B*1*C*.

*Ответ*: а) 60; б) 90; в) 

**Задача 15.** *A*…*F*1 - правильная шестиугольная призма, все ребра которой равны 1. Найдите величину угла между прямыми *ВA*1 и *СВ*1.

*Решение*. Найдем F (*ВA*1; *СВ*1) = .



Введем систему координат *Охуz*, где   *C*(0; 1; 0),  и   Находим:

 

*Ответ*: 

**Задачи для самостоятельного решения**

**.** В системе координат *Oxyz* расположен куб *A*…*D*1 так, что *D*(1; 0; 0), *C*1(0; 0; 1), *B*(0; 1; 0), *C*(0; 0; 0). Постройте этот куб. Координатным методом найдите угол между прямыми:

а) *A*1*B* и *AC*; б) *D*1*B* и *B*1*C*; в) *AC*1 и *D*1*B*.

**17.** Правильная шестиугольная призма *A*…*F*1, все ребра которой равны 1, расположена в системе координат O*xyz* так, что центр ее основания совпадает с началом координат, а вершины *A*, *F* , *F*1, *B*1 имеют координаты:  *F*(0; -1; 0), *F*1(0; -1; 1),  Постройте эту призму и координатным методом найдите величину угла между прямыми:

а) *AB*1 и *CF*1; б) *АВ* и *СD*1; в) *AF*1 и *A*1*B*.

*Ответы*: **16.** а) 60; б) 90; в)  **17.** а)  б)  в) 

**Угол между прямой и плоскостью**

Угол между прямой *l* :  и плоскостью :*Ax* + *By* + *Cz* + *D* = 0, можно найти, используя угол между направляющим вектором  прямой *l* и вектором нормали  плоскости  (см. рис.):





**Задача 18.** Куб *A*…*D*1 расположен в системе координат *Oxyz* так, что его вершины *D*, *А*1, *С*1, *D*1 имеют координаты: *D*(0; 0; 0), *А*1(1; 0; 1), С1(0; 1; 1), *D*1(0; 0; 1). Постройте изображение этого куба и координатным методом найдите синус угла между прямой и плоскостью:

а) *D*1*C*1 и *A*1*BD*; б) *A*1*B* и *AB*1*C*; в) *B*1*D*1 и *AB*1*C*; г) *A*1*B* и *BC*1*D*.

*Решение.* а) Найдем sin , где  = ∠ (*D*1*C*1; (*A*1*BD*)).



В системе координат *Oxyz* (см. рис.) вершины куба имеют координаты: *A*(1; 0; 0), *B*1(1; 1; 1), *C*(0; 1; 0), *B*(1; 1; 0). В качестве направляющего вектора прямой *D*1*C*1 примем вектор , в качестве вектора нормали плоскости  = (*A*1*BD*) -вектор  перпендикулярный векторам  и 

Найдем координаты вектора  Имеем:

     *a* = -*b* = -*c*.

Полагая *a* = 1, получим: *b* = *c* = -1, то есть , и



*Замечание.* Можно доказать, что *АС*1  (*A*1*BD*). Тогда в качестве вектора нормали для плоскости *A*1*BD* можно принять вектор 

Аналогично решаются и другие задачи.

*Ответ*: а)  б)  в)  г) 

**Задача 19.** В правильной шестиугольной призме *A*…*F*1, все ребра которой равны 1, найдите синус угла между прямой *ВD*1 и плоскостью *BF*1*С*.

Сначала рассмотрим решение этой задачи геометрическим методом, аргументируя шаги построений и доказательства утверждений, возникающих в процессе ее решения.

*Решение. Геометрический метод*. Обозначим: ∠ (*ВD*1; (*BF*1*С*))= . На рисунке построены точки *Q* = *ВС* ∩ *ЕD*, *K* = *E*1*F*1 ∩ *C*1*D*1, принадлежащие плоскости *BF*1*С*, и точка *R* = *DD*1 ∩ *E*1*Q* = (*BF*1*С*)∩ *DD*1. Треугольник *E*1*D*1*K* - правильный, так как ∠ *KE*1*D*1 = ∠ *KD*1*E*1 = 60 (почему?); его стороны равны 1(почему?).



Пусть точка *Т* - середина *E*1*K*, тогда *D*1*Т*  *E*1*K* (как медиана правильного треугольника *E*1*D*1*K*, следовательно, по теореме о трех перпендикулярах *RT*  *E*1*K*, значит, *E*1*K*  (*RD*1*Т*) (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости) и плоскости *BF*1*С* и *RD*1*Т* перпендикулярны по признаку перпендикулярности плоскостей. Это означает, что перпендикуляр *D*1*О*, проведенный из *D*1 на плоскость *BF*1*С*, расположен в плоскости *RD*1*Т*, причем *О*  *RТ* = (*BF*1*С*)∩ (*RD*1*Т*). Поэтому прямая *ОВ* - проекция *ВD*1 на плоскость *BF*1*С* и ∠ *ОВD*1 = ∠ (*ВD*1; (*BF*1*С*)) = . Найдем величину этого угла.

Отрезок *D*1*О* - высота прямоугольного треугольника *RD*1*Т* с катетами  и *RD*1= 0,5*D*1*D* = 0,5 (точка *R* - середина ребра *DD*1). Значит,



В прямоугольном треугольнике *ВD*1*D* находим:



Тогда в прямоугольном треугольнике *ОВD*1 с катетом  и гипотенузой *ВD*1 = 2 находим: 

Теперь рассмотрим решение этой задачи координатным методом.

*Координатный метод.* Обозначим ∠ (*ВD*1; (*BF*1*С*)) = .

Во введенной системе координат (см. рис.) точки *B*, *С*, *F*1, *D*1 имеют координаты:  *С*(0; 1; 0), *F*1(0; -1; 1), 



Направляющим вектором прямой *D*1*B* является 

Найдем координаты вектора нормали плоскости  = (*BF*1*С*), для чего составим ее уравнение.

Пусть *ах* + *by* + *cz* + *d* = 0 - искомое уравнение плоскости  = (*BF*1*С*). Имеем:

 

Решением последней системы является:  *b* = 3, *c* = 6, *d* = -3. То есть вектор нормали плоскости  имеет координаты Тогда



*Ответ*: 

**Задачи для самостоятельного решения**

**.** В системе координат *Oxyz* расположен куб *A*…*D*1 так, что *C*(1; 0; 0), B1(0; 0; 1), *A*(0; 1; 0), B(0; 0; 0). Постройте этот куб. Координатным методом найдите синус угла между прямой и плоскостью:

а) *BC* и (*AB*1*D*1); б) *A*1*B* и (*AB*1*C*); в) *B*1*D*1 и (*AB*1*C*); г) *A*1*B* и (*BC*1*D*).

**21.** Правильная шестиугольная призма *A*…*F*1, все ребра которой равны 1, расположена в системе координат *Oxyz* так, что центр ее основания совпадает с началом координат, а вершины *B*, *С*, *D*, *D*1 имеют координаты:  *С*(0; 1; 0),   Постройте эту призму и координатным методом найдите синус угла между:

а) прямой *В*1*Е* и плоскостью *BС*1*С*;

б) прямой *АВ* и плоскостью *BF*1*С*;

в) прямой *ВD*1 и плоскостью *BF*1*С*;

г) прямой *А*1*В* и плоскостью *ВВ*1*С*.

*Ответы*: **20.** а)  б)  в)  г)  **21.** а)  б)  в)  г)

**Угол между плоскостями**

Угол между плоскостями и заданными уравнениями *A*1*x* + *B*1*y* + *C*1*z* + *D*1 = 0 и *А*2*x* + *B*2*y* + *C*2*z* + *D*2 = 0 соответственно, удобно связать с углом между их векторами нормали  и  (см. рис.). Именно,





**Задача 22.** В системе координат *Oxyz* куб *A*…*D*1 расположен так, что *A*(1; 0; 0), *B*(0; 0; 0), *C*(0; 1; 0), *D*1(1; 1; 1). Постройте этот куб. Найдите угол между плоскостями:

а) *AB*1*C* и *ABC*1; б) *AB*1*C* и *A*1*BC*1; в) *D*1*AC* и *B*1*AC*.

*Решение.* а) Из условия следует, что точка *B*(0; 0; 0) - начало координат, точки *A*(1; 0; 0) и *C*(0; 1; 0) - лежат на осях *Ох* и *Оу* соответственно. Тогда точки *В*1, *А*1, *С*1, *D*приобретают координаты: *B*1(0; 0; 1), *A*1(1; 0; 1), *C*1(0; 1; 1), *D*(1; 1; 0). На рисунке изображен куб относительно системы координат *Охуz*.



Найдем угол  между плоскостями  = (*AB*1*C*) и = (*ABC*1). Пусть плоскость  = (*AB*1*C*) имеет уравнение:

*аx* + *by* + *cz* + *d* = 0.

Так как плоскость  проходит через точки *A*, *B*и *C*1, то координаты этих точек удовлетворяют уравнению этой плоскости, поэтому числа *a*, *b*, *c* и *d* являются решением системы уравнений:

  

Полагая *d* = -1, получаем уравнение плоскости

 = (*AB*1*C*): *х* + *у* + *z* - 1= 0.

Значит, вектор  нормали этой плоскости имеет координаты 

В качестве вектора нормали плоскости  = (*AB*С1) примем вектор  перпендикулярный векторам  и 

Найдем координаты вектора  Имеем:

   

Полагая *c*1 = -1, получаем:  Тогда:

 

Аналогично находятся углы между плоскостями в пунктах «б» и «в».

*Ответ*: а) 90; б)  в) 

**.** В правильной шестиугольной призме *A*…*F*1, все ребра которой равны 1, найдите синус угла между плоскостями *А*1*ВС* и *АВ*1*F*.

Сначала рассмотрим решение этой задачи геометрическим методом, аргументируя шаги построений и доказательства утверждений, возникающих в процессе ее решения.

*Решение*. Обозначим: ∠ ((*А*1*ВС*); (*АВ*1*F*)) = ; *Р* = *В*1*Е*1 ∩ *А*1*D*1; *K* = *АВ*1 ∩ *А*1*В*. Тогда (*А*1*ВС*)∩ (*АВ*1*F*) = *KР* - ребро двугранного угла, образованного плоскостями *А*1*ВС* и *АВ*1*F* (см. рис.). Найдем sin .



Имеем: точка *Р* - середина диагоналей *В*1*Е*1 и *А*1*D*1, равных 2, поэтому *А*1*Р* = *В*1*Р* =1.

Аналогично, точка *K* - середина диагоналей *А*1*В* и *АВ*1, равных  поэтому  Тогда треугольники *А*1*РK* и *В*1*РK* равны, следовательно, *А*1*Т* = *В*1*Т*, где *А*1*Т* и *В*1*Т* - высоты этих треугольников, проведенные к их общей стороне *РK*. Это означает, что F ((*А*1*ВС*); (*АВ*1*F*)) = F *А*1*ТВ*1= . Найдем sin .

Замечаем, что отрезок *РK* - средняя линия треугольника *АВ*1*Е*1, поэтому *РK* = 0,5*АЕ*1.

В прямоугольном треугольнике *АЕ*1*Е* с катетами  и *Е*1*Е* =1 находим:



значит, *РK* = 1.

Если *KТ* = *х*, то *РТ* = 1 - *х*, тогда на основании *А*1*K*2 - *KТ*2 = *А*1*Р*2 - *РТ*2 получаем: 0,5 - *х*2 = 1 - (1 - 2*х* + *х*2), откуда *х* = 0,25 = *ТK*. Значит,



Далее, пусть точка *H* - середина *А*1*В*1. Тогда в равнобедренном треугольнике *А*1*В*1*Т*:  при этом

  Тогда



Теперь рассмотрим решение этой же задачи *координатным способом*.

Обозначим ∠ . Найдем координаты векторов нормалей плоскостей  = (*А*1*ВС*) и  = (*АВ*1*F*).

Во введенной системе координат *Oxyz* (см. рис.) точки *А*1, *В*, *С*, *А*, *В*1, *F* имеют координаты:

  *С*(0; 1; 0),   *F*(0; -1; 0).



Вектор  нормали плоскости  перпендикулярен векторам  и  Координаты вектора  найдем из условия его перпендикулярности векторам  и  Имеем:

    

Полагая  получим: *b = c* = 3. Таким образом, 

Аналогично, вектор  нормали плоскости  перпендикулярен векторам  и  Поэтому координаты *а*1, *b*1 и *c*1 найдем, решая систему уравнений:

  

Полагая  получим: *b*1 *= -*3*, c*1 = 3. Таким образом,  Тогда:

  

*Ответ*: 

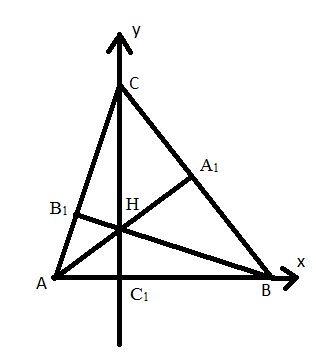
**Задачи на доказательство**

№*1*

*Докажите, что три прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке.*

Доказательство

Введем прямоугольную декартову систему координат. Пусть АА1, ВВ1, СС1 – высоты ∆АВС, точка С1начало координат. Тогда вершины ∆АВС имеют координаты:

https://fsd.kopilkaurokov.ru/up/html/2017/09/29/k_59ce06b399965/430176_1.png 

где https://fsd.kopilkaurokov.ru/up/html/2017/09/29/k_59ce06b399965/430176_3.png

https://fsd.kopilkaurokov.ru/up/html/2017/09/29/k_59ce06b399965/430176_4.png

https://fsd.kopilkaurokov.ru/up/html/2017/09/29/k_59ce06b399965/430176_5.png

https://fsd.kopilkaurokov.ru/up/html/2017/09/29/k_59ce06b399965/430176_6.png

https://fsd.kopilkaurokov.ru/up/html/2017/09/29/k_59ce06b399965/430176_7.png

https://fsd.kopilkaurokov.ru/up/html/2017/09/29/k_59ce06b399965/430176_8.png

https://fsd.kopilkaurokov.ru/up/html/2017/09/29/k_59ce06b399965/430176_9.png

https://fsd.kopilkaurokov.ru/up/html/2017/09/29/k_59ce06b399965/430176_10.png

https://fsd.kopilkaurokov.ru/up/html/2017/09/29/k_59ce06b399965/430176_11.png

https://fsd.kopilkaurokov.ru/up/html/2017/09/29/k_59ce06b399965/430176_12.png

Координаты точки *Н* удовлетворяют уравнению *ВВ1*:

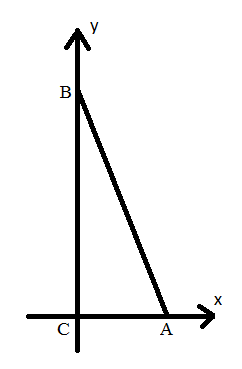
https://fsd.kopilkaurokov.ru/up/html/2017/09/29/k_59ce06b399965/430176_13.png

Следовательно, https://fsd.kopilkaurokov.ru/up/html/2017/09/29/k_59ce06b399965/430176_14.png.

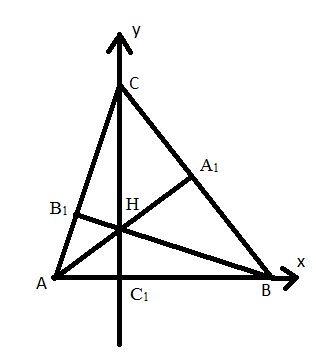
Ч.т.д.

№*2*

*Докажите теорему Пифагора: в прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.*

Доказательство

Введем прямоугольную декартову систему координат. Пусть в ∆АВС, https://fsd.kopilkaurokov.ru/up/html/2017/09/29/k_59ce06b399965/430176_16.png. Точка С – начало координат. Вершины ∆АВС имеют координаты:

https://fsd.kopilkaurokov.ru/up/html/2017/09/29/k_59ce06b399965/430176_17.png 

где https://fsd.kopilkaurokov.ru/up/html/2017/09/29/k_59ce06b399965/430176_19.png

https://fsd.kopilkaurokov.ru/up/html/2017/09/29/k_59ce06b399965/430176_20.png

https://fsd.kopilkaurokov.ru/up/html/2017/09/29/k_59ce06b399965/430176_21.png

https://fsd.kopilkaurokov.ru/up/html/2017/09/29/k_59ce06b399965/430176_22.png

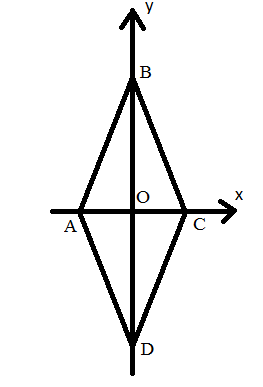
https://fsd.kopilkaurokov.ru/up/html/2017/09/29/k_59ce06b399965/430176_23.png

Ч.т.д.

**Задачи на вычисление**

№*3*

*Вычислите расстояние между прямыми, содержащими противоположные стороны ромба, если длины его диагоналей равны https://fsd.kopilkaurokov.ru/up/html/2017/09/29/k_59ce06b399965/430176_24.png.*

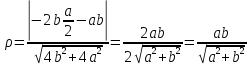
Решение

Введем прямоугольную декартову систему координат. Пусть ABCD – ромб. https://fsd.kopilkaurokov.ru/up/html/2017/09/29/k_59ce06b399965/430176_26.png. Точка *О* – начало координат. Вершины ромба имеют координаты:

https://fsd.kopilkaurokov.ru/up/html/2017/09/29/k_59ce06b399965/430176_27.png.

https://fsd.kopilkaurokov.ru/up/html/2017/09/29/k_59ce06b399965/430176_28.png

Расстояние от точки А до прямой ВС равно:

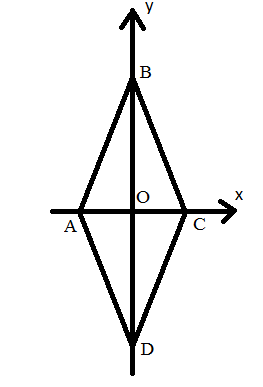
.

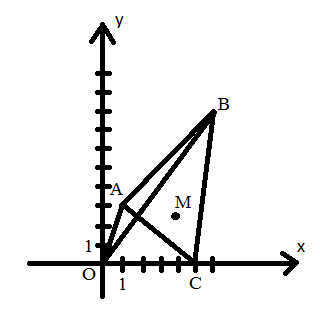
Ответ: https://fsd.kopilkaurokov.ru/up/html/2017/09/29/k_59ce06b399965/430176_30.png

№*4*

*Решите уравнение :*

https://fsd.kopilkaurokov.ru/up/html/2017/09/29/k_59ce06b399965/430176_31.png

Решение

Введем прямоугольную декартову систему координат. Пусть https://fsd.kopilkaurokov.ru/up/html/2017/09/29/k_59ce06b399965/430176_33.png.

https://fsd.kopilkaurokov.ru/up/html/2017/09/29/k_59ce06b399965/430176_35.png

https://fsd.kopilkaurokov.ru/up/html/2017/09/29/k_59ce06b399965/430176_36.png

https://fsd.kopilkaurokov.ru/up/html/2017/09/29/k_59ce06b399965/430176_37.png

https://fsd.kopilkaurokov.ru/up/html/2017/09/29/k_59ce06b399965/430176_38.png

https://fsd.kopilkaurokov.ru/up/html/2017/09/29/k_59ce06b399965/430176_39.png

https://fsd.kopilkaurokov.ru/up/html/2017/09/29/k_59ce06b399965/430176_40.png

https://fsd.kopilkaurokov.ru/up/html/2017/09/29/k_59ce06b399965/430176_41.png

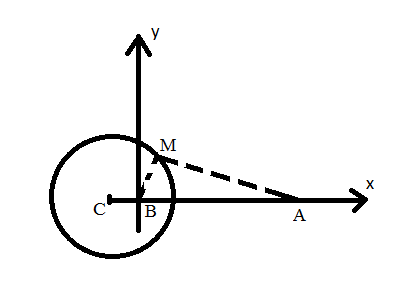
Ответ: https://fsd.kopilkaurokov.ru/up/html/2017/09/29/k_59ce06b399965/430176_42.png

**Задачи на отыскание геометрических мест точек**

№*5*

*Найдите множество всех точек, для каждой из которых отношение расстояний от двух точек А и В есть постоянная величина*λ*, не равная единице.*

Решение

Введем прямоугольную декартову систему координат. Пусть точка *В* – начало координат и точка *А* лежит на оси *х*. Тогда https://fsd.kopilkaurokov.ru/up/html/2017/09/29/k_59ce06b399965/430176_43.png.

Для того чтобы точка https://fsd.kopilkaurokov.ru/up/html/2017/09/29/k_59ce06b399965/430176_45.png принадлежала искомому множеству, необходимо и достаточно, чтобы

https://fsd.kopilkaurokov.ru/up/html/2017/09/29/k_59ce06b399965/430176_46.png

https://fsd.kopilkaurokov.ru/up/html/2017/09/29/k_59ce06b399965/430176_47.png

https://fsd.kopilkaurokov.ru/up/html/2017/09/29/k_59ce06b399965/430176_48.png

https://fsd.kopilkaurokov.ru/up/html/2017/09/29/k_59ce06b399965/430176_49.png

https://fsd.kopilkaurokov.ru/up/html/2017/09/29/k_59ce06b399965/430176_50.png

Т.к.  то разделим на

Этим уравнением определяется окружность радиуса с центром в точке. Точка *С* лежит на прямой *АВ*. Эта окружность называется окружностью Аполлония.

№*6*

*Дана окружность радиуса r и на ней точка А. Найдите множество точек Ω, делящих все возможные хорды, проходящие через точку А, в одном и том же отношении , где .*

Решение

Введем прямоугольную декартову систему координат, чтобы центр данной окружности совпадал с началом координат, а точка *А* имела координаты . Пусть *АВ* – произвольная хорда, проходящая через точку *А*, а *М* точка множества *Ω*, т.е.

https://fsd.kopilkaurokov.ru/up/html/2017/09/29/k_59ce06b399965/430176_46.png*,*

где

 (1)

Отсюда, учитывая, что , получаем:

(2)

Т.к. точка  лежит на данной окружности, то , поэтому

(3)

(4)

Итак, доказано, что если  - произвольная точка искомого множества *Ω*, то ее координаты удовлетворяют уравнению (4).

Обратно, если координаты  точки М удовлетворяют уравнению (4), то они удовлетворяют также уравнению (3). Отсюда следует, что точка , координаты которой определяются равенствами (2), лежат на одной окружности . С другой стороны, из равенства (3) получаем равенство (1), т.е. точка *М* делит отрезок *АВ* в отношении  и , следовательно, .

**Задачи для самостоятельного решения**

**.** В системе координат *Oxyz* расположен куб *A*…*D*1 так, что *A*1(1; 0; 0), *B*(1; 1; 1), *D*(0; 1; 0), *D*1(0; 0; 0). Постройте этот куб. Координатным методом найдите угол между плоскостями:

а) (*AB*1*C*) и (*ABC*1); б) (*AB*1*C*) и (*A*1*BC*1); в) (*D*1*AC*) и (*B*1*AC*).

**25.** Правильная шестиугольная призма *A*…*F*1, все ребра которой равны 1, расположена в системе координат *Oxyz* так, что центр ее основания совпадает с началом координат, а вершины *А*1, *B*, *C*, *D* имеют координаты:   *C*(0; 1; 0),  Постройте эту призму и координатным методом найдите синус угла между плоскостью *ABC* и плоскостями:

а) (*BС*1*F*); б) (*FВ*1*D*1); в) (*ВС*1*D*); г) (*А*1*СЕ*1); д) (*ВFD*1).

*Ответы*: **24.** а) 90; б)  в)  **25.** а) б)  в)  г)  д) 

**Заключение**

Исследовав координатный метод, можно сказать, что он не является универсальным методом, такого метода не существует, каждый из методов, по-своему, наиболее применим к той или иной задаче. Следует отметить, что рассмотренные примеры задач показывают, что координатный метод является средством решения задач на доказательство теорем, на вычисление и на отыскание геометрических мест точек.

Решение задач по математике имеет большое общеобразовательное и воспитательное значение. Поиск решения нестандартной задачи развивает инициативу, настойчивость и сообразительность. Если к тому же задачи достаточно разнообразны, то их решение является прекрасным средством развития логического мышления, строгости суждений и математического вкуса.

Координатный метод представляет собой мощный аппарат, позволяющий привлекать для исследования геометрических объектов алгебраические методы.

Хорошо известны те трудности, которые испытывают учащиеся при решении геометрических задач, поэтому рассмотрение вопросов, связанных с координатным методом решения задач, имеет важное значение в математике.

**Литература**

1. *Потоскуев Е.В., Звавич Л.И.* Геометрия. 10 кл.: Учебник для общеобразовательных учреждений с углубленным и профильным изучением математики. - М.: Дрофа, 2011.

2. *Потоскуев Е.В., Звавич Л.И.* Геометрия. 10 кл.: Задачник для общеобразовательных учреждений с углубленным и профильным изучением математики. - М.: Дрофа, 2011.

. *Потоскуев Е.В.* Векторы и координаты как аппарат решения геометрических задач: уч. пособие. - М.: Дрофа, 2008. - (Элективные курсы).