

Различные методы решение показательных неравенств

Выпускная творческая работа

слушателя курсов повышения квалификации

по дополнительной профессиональной программе

«Теоретические основы и методика обучения математике

в общеобразовательных учреждениях» (с использованием ДОТ)

учителя математики МКОУ СОШ п. Индустриальный Екатериновского

района Саратовской области.

Назаровой Любви Валентиновны

В своей работе я рассмотрю основные типы показательных неравенств, а также различные методы их решений. Решение показательных неравенств, основано на свойствах показательной функции.

Глава I. Общие сведения.

1.1. Показательная функция.

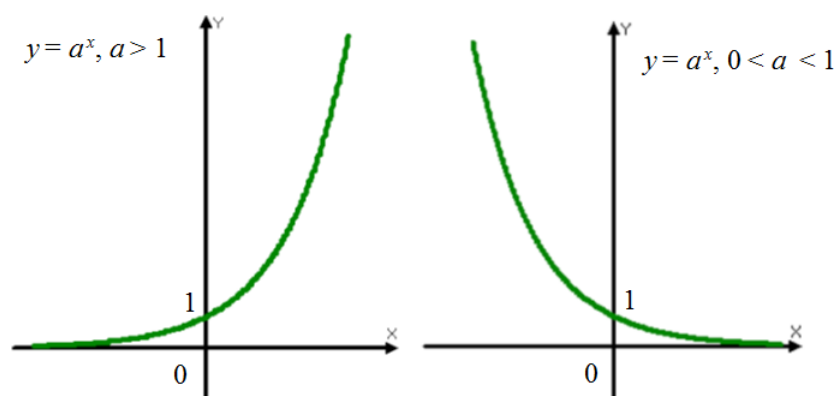
Функцию вида $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$, называют показательной функцией.

Основные свойства показательной функции $y = a^x$:

Свойство	$a > 1$	$0 < a < 1$
Область определения	$D(f) = (-\infty; +\infty)$	$D(f) = (-\infty; +\infty)$
Область значений	$E(f) = (0; +\infty)$	$E(f) = (0; +\infty)$
Монотонность	Возрастает	Убывает
Непрерывность	Непрерывная	Непрерывная

График показательной функции

Графиком показательной функции является экспонента:



Графики показательных функций (экспоненты)

1.2. Показательные неравенства

Показательными называются неравенства, в которых неизвестная переменная содержится только в показателях каких-либо степеней.

Простейшие показательные неравенства.

Простейшие показательные неравенства имеют вид

$$a^x < b, a^x > b, \text{ где } a \neq 1, a > 0.$$

При $b \leq 0$ неравенство $a^x < b$ решений не имеет, а неравенство $a^x > b$ выполняется при всех значениях аргумента, поскольку $a^x > 0$.

При $b > 0$ выполняется равенство $a^{\log_a b} = b$.

Если $a > 1$, то в силу возрастания показательной функции неравенство $a^x > b$ выполняется при $x > \log_a b$, а неравенство $a^x < b$ выполняется при $x < \log_a b$.

Если $0 < a < 1$, то в силу убывания показательной функции неравенство $a^x > b$ выполняется при $x < \log_a b$, а неравенство $a^x < b$ выполняется при $x > \log_a b$.

1.3. Решение простейших показательных неравенств.

Используя свойство монотонности показательной функции делаем вывод, что неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ при $a > 1$ равносильно неравенству

$f(x) > g(x)$, а при $0 < a < 1$ равносильно неравенству $f(x) < g(x)$.

Решение простейших показательных неравенств основано на свойствах степени:

$$\begin{array}{l} a^{f(x)} > a^{g(x)} \\ a > 1 \\ \Leftrightarrow f(x) > g(x) \end{array}$$

а) { 1 1 1 1 1 }

$$\begin{array}{l} a^{f(x)} > a^{g(x)} \\ 0 < a < 1 \\ \Leftrightarrow f(x) < g(x) \end{array}$$

б) { 1 1 1 1 1 }

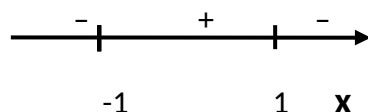
$$\left(\frac{\pi}{4} \right)^{\frac{2+x}{1-x}} > \sqrt{\frac{\pi}{4}}$$

Пример 1

Решение. $\frac{\pi}{4} < 1$, следовательно $\frac{2+x}{1-x} < \frac{1}{2}$, $\frac{4+2x-1+x}{1-x} < 0$,

$$\frac{3x+3}{1-x} < 0$$

$$\frac{x+1}{1-x} < 0$$



$$\begin{cases} x < -1 \\ x > 1 \end{cases}$$

Ответ. $(-\infty; -1) \cup (1; \infty)$

1.4. Неравенства, сводящиеся к простейшим.

Решаются приведением обеих частей неравенства к степени с одинаковым основанием.

Пример 2 $2^{x^2} > 2^{x+2}$.

Решение. $2^{x^2} > 2^{x+2}$;

$x^2 > x+2$, т.к. функция $y = 2^t$ возрастает,

$$x^2 - x - 2 > 0;$$

$$x < -1; x > 2.$$

Ответ: $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

Пример 3 $\left(\frac{1}{9}\right)^x \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$.

Решение.

$$\left(\frac{1}{9}\right)^x \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1};$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1},$$

$2x \geq x - 1$, т.к. функция $y = \left(\frac{1}{3}\right)^t$ убывает,

$$x \geq -1$$

Ответ: $[-1; +\infty)$

1.5. Неравенства, решаемые с помощью вынесения за скобки общего множителя.

Пример 4 $8 \cdot 2^{x-1} - 2^x > 48$

Решение. $2^{x-1}(8 - 2) > 48$,

$$2^{x-1} > 8,$$

$$2^{x-1} > 2^3,$$

$x - 1 > 3$, т.к. функция $y = 2^t$ возрастает,

$$x > 4.$$

Ответ: $(4; +\infty)$

Пример 5 $2^{x+2} + 5^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1}$

Решение.

$$2^{x+2}(1 - 2 - 4) > 5^{x+1}(1 - 5); -5 \cdot 2^{x+2} > -4 \cdot 5^x; -10 \cdot 2^{x+1} > -4 \cdot 5^{x+1};$$

$$5 \cdot 2^{x+1} < 2 \cdot 5^{x+1}; 2^x < 5^x; \left(\frac{2}{5}\right)^x < 1, x > 0$$

Ответ. $(0; \infty)$.

Неравенство вида $a^{f(x)} \geq b$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ может быть решено логарифмированием его обеих частей.

Пример 6 $3^{2x-1} > 7^{3-x}$

Решение. $\log_3 3^{2x-1} > \log_3 7^{3-x}$; $2x-1 > (3-x) \log_3 7$;

$$2x + x \log_3 7 > 1 + 3 \log_3 7, \quad x(2 + \log_3 7) > 1 + 3 \log_3 7,$$

т.к. $2 + \log_3 7 > 0$, то $x > \frac{1 + 3 \log_3 7}{2 + \log_3 7}$

Ответ. $\left(\frac{1 + 3 \log_3 7}{2 + \log_3 7}; \infty \right)$

Рассмотрим методы решения показательных неравенств, не являющихся простейшими. При их решении используются приёмы преобразования выражений, стоящих в левой и правой частях неравенства.

Глава II. Алгебраические методы решения неравенств.

2.1. Метод замены переменной.

Неравенства вида $f(a^x) \geq 0$ при помощи замены переменной $t = a^x$

$$f(t) \geq 0, \quad t > 0$$

, сводятся к решению системы неравенств $\begin{cases} f(t) \geq 0 \\ t > 0 \end{cases}$.

В этом случае новая переменная подбирается так, чтобы относительно неё неравенство не было показательным.

Пример 7 Сведение к квадратному неравенству.

$$4^x - 2^{x+1} - 24 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = t, \\ t > 0, \\ t^2 - 2t - 24 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = t, \\ t > 0, \\ -4 < t < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = t, \\ 0 < t < 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2^x < 6 \Leftrightarrow 2^x < 2^{\log_2 6} \Leftrightarrow x < \log_2 6.$$

Ответ: $(-\infty; \log_2 6)$.

Пример 8 $3^{x+1} + 18 \cdot 3^{-x} > 29$

Решение. Обозначим $3^x = y, y > 0$;

$$3y + \frac{18}{y} - 29 > 0, \quad 3y^2 - 29y + 18 > 0,$$

$$\begin{aligned} & \text{ } [y < \frac{2}{3}] \text{ } [\\ & \text{ } [y > 9] \text{ } \end{aligned}$$

$$[3^x < \frac{2}{3}] \text{ } [$$

$$[3^x > 9$$

$$\text{ } [x < \log_3 \frac{2}{3}] \text{ } [$$

$$[x > 2$$

Ответ. $\left(-\infty; \log_3 \frac{2}{3}\right) \cup (2; \infty)$.

2.2. Решение однородных неравенств. При решении однородных неравенств используется свойство показательной функции $a^x > 0$, производим деление обеих частей неравенства на положительную величину и вводим новую переменную. Однородное неравенство первой степени $ma^x + nb^x > 0$ решается делением обеих частей неравенства на $a^x > 0$, а однородное неравенство второй степени $ma^{2x} + nb^{2x} + ka^x b^x > 0$ решается делением на a^{2x} (или b^{2x} , или $a^x b^x$).

Пример 9 $2^{x+1} - 3 \cdot 10^x > 5^{2x+1}$

Решение.

$$2^{x+1} - 3 \cdot 10^x > 5^{2x+1} \Leftrightarrow 2 \cdot 2^x - 10^x - 5 \cdot 5^{2x} > 0$$

Так как $5^{2x} > 0$ для любых x , то разделив обе части неравенства на 5^{2x} , получим неравенство, равносильное данному:

$$2 \cdot 0,4^{2x} - 3 \cdot (0,4)^x - 5 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (0,4)^x = t, \\ t > 0, \\ 2t^2 - 3t - 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (0,4)^x = t, \\ t > 0, \\ \begin{cases} t > 2,5 \\ t < -1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (0,4)^x > 2,5 \Leftrightarrow x < -1.$$

Ответ: $(-\infty; -1)$

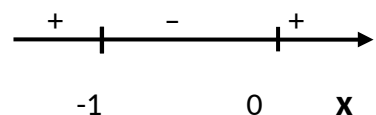
Пример 10- $5 \cdot 25^{\frac{1}{x}} + 3 \cdot 10^{\frac{1}{x}} \geq 2 \cdot 4^{\frac{1}{x}}$

Решение. Так как $\left(\frac{1}{4}\right)^x \neq 0$ для любых x , то разделив обе части неравенства на $\left(\frac{1}{4}\right)^x$, получим неравенство, равносильное данному:

$$5 \cdot \left(\frac{25}{4}\right)^{\frac{1}{x}} + 3 \cdot \left(\frac{10}{4}\right)^{\frac{1}{x}} - 2 \geq 0, \quad 5 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{2}{x}} + 3 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{x}} - 2 \geq 0$$

Обозначим. $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = t, \quad t > 0.$ $5t^2 + 3t - 2 \geq 0,$ $\begin{cases} t \leq -1; \\ t \geq \frac{2}{5}. \end{cases}$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \geq \frac{2}{5}; \quad \frac{1}{x} \geq -1, \quad \frac{1}{x} + 1 \geq 0, \quad \frac{1+x}{x} \geq 0;$$



$$\begin{cases} x \leq -1 \\ x > 0 \end{cases}$$

Ответ. $(-\infty; -1] \cup (0; \infty)$

Пример 11 Решите неравенство:

$$16^x - 2 \cdot 12^x \leq 3^{2x+1}.$$

Решение. Представим исходное неравенство в виде:

$$4^{2x} - 2 \cdot 4^x \cdot 3^x - 3 \cdot 3^{2x} \leq 0.$$

Разделим обе части этого неравенства на 3^{2x} , при этом (в силу положительности функции $y = 3^{2x}$) знак неравенства не изменится:

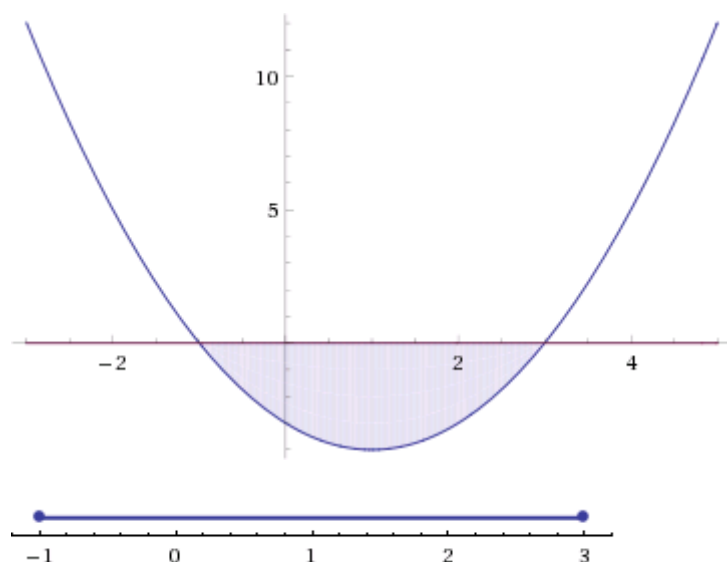
$$\left(\frac{4}{3}\right)^{2x} - 2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^x - 3 \leq 0.$$

Воспользуемся подстановкой:

$$t = \left(\frac{4}{3}\right)^x.$$

Тогда неравенство примет вид:

$$t^2 - 2t - 3 \leq 0.$$



Итак, решением неравенства является промежуток:

$$-1 \leq t \leq 3,$$

переходя к обратной подстановке, получаем:

$$-1 \leq \left(\frac{4}{3}\right)^x \leq 3.$$

Левое неравенства в силу положительности показательной функции выполняется автоматически. Воспользовавшись известным свойством логарифма, переходим к эквивалентному неравенству:

$$\left(\frac{4}{3}\right)^x \leq \left(\frac{4}{3}\right)^{\log_{\frac{4}{3}} 3}.$$

Поскольку в основании степени стоит число, большее единицы, эквивалентным (по теореме 2) будет переход к следующему неравенству:

$$x \leq \log_{\frac{4}{3}} 3.$$

Итак, окончательно получаем ответ:

$$x \in (-\infty; \log_{\frac{4}{3}} 3].$$

Глава III. Функционально-графические методы решения неравенств.

3.1 Использование непрерывности функции.

а) Метод интервалов. При решении неравенств методом интервалов используют свойство непрерывности функции.

Если функция $f(x)$ непрерывна на интервале и не обращается в нуль, то она на этом интервале сохраняет постоянный знак.

Пример 12

$$4^x \leq 3 \cdot 2^{\sqrt{x}+x} + 4^{1+\sqrt{x}}$$

Решение.

Рассмотрим функцию $f(x) = 4^x - 3 \cdot 2^{\sqrt{x}+x} - 4^{1+\sqrt{x}}$, областью определения которой является множество неотрицательных чисел. Находим нули функции, решив уравнение $4^x - 3 \cdot 2^{\sqrt{x}+x} - 4^{1+\sqrt{x}} = 0$. Делим обе части уравнения на $2^{x+\sqrt{x}}$, после преобразований получим уравнение

$(2^{x-\sqrt{x}})^2 - 3 \cdot 2^{x-\sqrt{x}} - 4 = 0$, откуда $2^{x-\sqrt{x}} = 4$ или $2^{x-\sqrt{x}} = -1$. Последнее уравнение не имеет решения, а уравнение $2^{x-\sqrt{x}} = 4$ имеет единственный корень, равный 4. Нуль функции разбивает область определения на промежутки $[0; 4]$ и

$4; +\infty$, в которых функция (в силу своей непрерывности) сохраняет знак.

$f(1) < 0$,

$$f(9) = 4^9 - 3 \cdot 2^{12} - 4^4 = 4^4 \cdot (4^5 - 48 - 1) > 0$$

Итак, исходное неравенство выполняется при $0 \leq x \leq 4$.

Ответ: $[0; 4]$.

Пример 13 Решите неравенство:

$$\frac{7^x - 30}{7^{x-1} + 1} \leq -14.$$

Решение.

Используя свойства умножения и деления степеней, перепишем неравенство в виде:

$$\frac{7^x - 30}{\frac{1}{7} \cdot 7^x + 1} \leq -14.$$

Введем новую переменную:

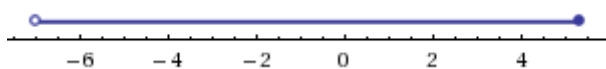
$$t = 7^x.$$

С учетом этой подстановки неравенство принимает вид:

$$\frac{t - 30}{\frac{1}{7} \cdot t + 1} + 14 \leq 0 \Leftrightarrow$$

Умножим числитель и знаменатель дроби на 7, получаем следующее равносильное неравенство:

$$\begin{aligned} \frac{7t - 210}{t + 7} + 14 &\leq 0 \Leftrightarrow \\ \frac{21t - 112}{t + 7} &\leq 0 \Leftrightarrow \frac{3t - 16}{t + 7} \leq 0. \end{aligned}$$



Итак, неравенству удовлетворяют следующие значения переменной t :

$$-7 \leq t \leq \frac{16}{3}.$$

Тогда, переходя к обратной подстановке, получаем:

$$-7 \leq 7^x \leq \frac{16}{3}.$$

$$7^x \leq 7^{\log_7 \frac{16}{3}}.$$

Поскольку основание степени здесь больше единицы, равносильным будет переход к неравенству: $x \leq \log_7 \frac{16}{3}.$

Ответ: $x \in \left(-\infty; \log_7 \frac{16}{3}\right].$

б) Метод рационализации. Чтобы расширить возможности применения метода интервалов при решении неравенств, используют идею рационализации неравенств. Метод рационализации заключается в замене сложного выражения $F(x)$ на более простое выражение $G(x)$, при которой неравенство $G(x) > 0$ равносильно неравенству $F(x) > 0$ в области определения выражения $F(x)$

$$F(x) = a^{f(x)} - a^{g(x)}, \quad G(x) = (a - 1)(f(x) - g(x)).$$

При решении неравенства вида $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ следует помнить, что показательная функция $y = ax$ возрастает при $a > 1$ и убывает при $0 < a < 1$. Для его решения исследуем знак разности $a^{f(x)} - a^{g(x)}$. Итак, выясним, что следует из того, что $a^{f(x)} - a^{g(x)} > 0$.

- Если $a > 1$, то $f(x) > g(x)$, а это значит, что $(a - 1)(f(x) - g(x)) > 0$.
- Если $0 < a < 1$, то $f(x) < g(x)$, и опять $(a - 1)(f(x) - g(x)) > 0$.

Верно и обратное. Если $(a - 1)(f(x) - g(x)) > 0$, то при $a > 1$ имеем $f(x) > g(x)$, то есть $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, а при $0 < a < 1$ получаем $f(x) < g(x)$, то есть $a^{g(x)} > a^{f(x)}$.

Таким образом, знак разности $a^{f(x)} - a^{g(x)}$ совпадает со знаком выражения $(a - 1)(f(x) - g(x))$.

А это как раз обозначает, что получено условие равносильности:

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow (a - 1)(f(x) - g(x)) > 0.$$

Пример 14 Решить неравенство

$$\frac{(2^{x^2} - 2) \left(3^x - \frac{1}{3}\right) \left(5^{x^2} - \frac{1}{25}\right)}{(2^x - 1)(3^x - 9)(4^{x^2} - 16)} \leq 0.$$

Решение.

Имеем:
$$\frac{(2^{x^2} - 2^1)(3^x - 3^{-1})(5^{x^2} - 5^{-2})}{(2^x - 2^0)(3^x - 3^2)(4^{x^2} - 4^2)} \leq 0.$$

Заменим выражение вида $a^{f(x)} - a^{g(x)}$ стоящее в каждой скобке, на выражение $(a - 1)(f(x) - g(x))$ имеющее с ним тот же

знак:
$$\frac{(2 - 1)(x^2 - 1) \cdot (3 - 1)(x + 1) \cdot (5 - 1)(x^2 + 2)}{(2 - 1)(x - 0) \cdot (3 - 1)(x - 2) \cdot (4 - 1)(x^2 - 2)} \leq 0.$$

А значит,
$$\frac{(x^2 - 1)(x + 1)(x^2 + 2)}{x(x - 2)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})} = \frac{(x + 1)^2(x - 1)(x^2 + 2)}{x(x - 2)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})} \leq 0.$$

Равносильное неравенство имеет вид
$$\frac{(x + 1)^2(x - 1)}{x(x - 2)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})} \leq 0,$$
 так как $x^2 + 2 > 0$

для всех x . Решая это неравенство методом интервалов, получаем

Ответ.
$$x \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup \{-1\} \cup (0; 1] \in (\sqrt{2}; 2).$$

3.2 Использование монотонности функций.

Пример 15 $2^x \leq 3 - x$

Решение. Функции $f(x) = 2^x$ и $g(x) = 3 - x$ определены на всём множестве действительных чисел. Функция $f(x) = 2^x$ возрастающая на \mathbb{R} , а функция $g(x) = 3 - x$ убывающая на \mathbb{R} , значит, уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного корня. Не сложно убедиться в том, что 1 является единственным корнем уравнения. Таким образом, графики функций имеют одну точку

пересечения. Неравенство имеет решение тогда, когда график функции

$f(x)=2^x$ лежит не выше графика функции $g(x)=3-x$, то есть при $x \leq 1$.

Ответ: $(-\infty; 1]$.

Пример 16 Решите неравенство $2^{x^2-4x+5} \leq 4x-2-x^2$

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=4x-2-x^2$ – парабола, ветви вниз, координаты вершины $(2; 2)$, т.е. $f(x) \leq 2$.

Рассмотрим функцию $g(x)=2^{x^2-4x+5}$; $g(x)=2^{(x-2)^2+1}$ $g(x) \geq 2$.

$$\begin{aligned} 4x-2-x^2 &= 2 \\ 2^{x^2-4x+5} &= 2 \end{aligned}$$

Тогда неравенство равносильно системе $\begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq 2 \end{cases} \quad x=2$

3.3. Графический метод решения неравенств.

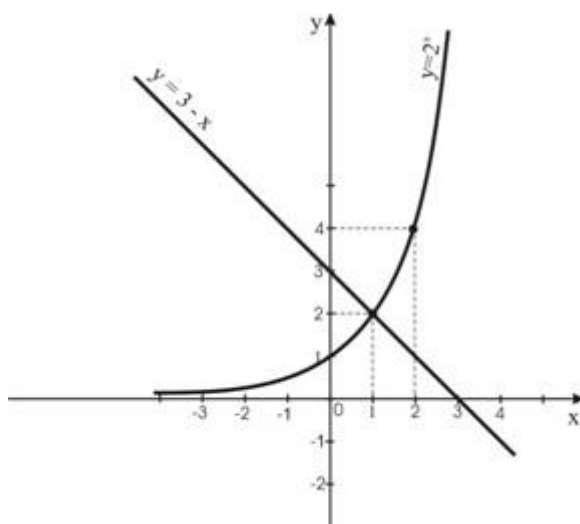
При решении неравенств графическим способом необходимо рассмотреть две функции, построить их графики в одной системе координат и выяснить при каких значениях аргумента значения одной функции больше (меньше) значений другой функции. Найденные значения аргумента и есть решения неравенства.

Пример 17 $2^x \leq 3-x$

Решение.

$$y = 2^x, y = 3-x$$

1.



Построим графики функций $y = 2^x$ и $y = 3 - x$.

2. Найдем точки пересечения графиков функций $x = 1$.

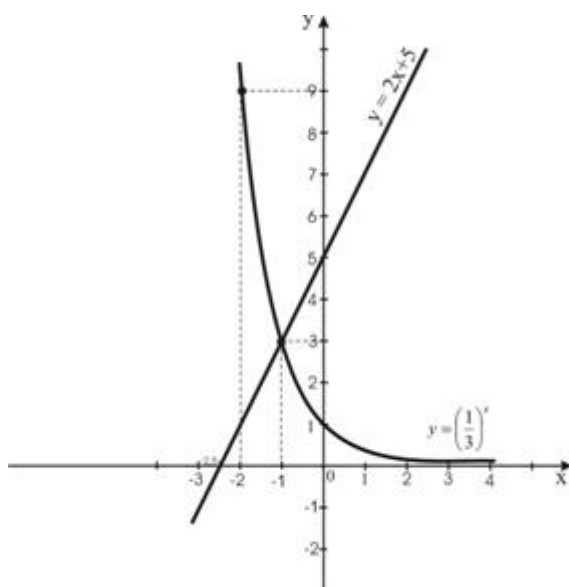
3. Решением данного неравенства будут те значения x , для каждого из которых график функции $y = 2^x$ лежит ниже графика $y = 3 - x$.

Ответ: $x \in (-\infty; 1]$

Пример 18 $\left(\frac{1}{3}\right)^x \leq 2x + 5$

$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x, y = 2x + 5$$

1.



$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x, y = 2x + 5$$

Построим график функций

2. Найдем точки пересечения графиков функций.

3. Решением данного неравенства будут те значения x , для каждого из

которых график функции $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
 лежит ниже графика $y = 2x + 5$.
 Ответ: $x \in [-1; +\infty)$.

3.4. Использование ограниченности функций.

Для использования ограниченности функции необходимо уметь находить множество значений функции и знать оценки области значений стандартных функций.

Пример 19 Решите неравенство:

$$2x + 2 - x^2 \geq 3^{x^2 - 2x + 2}.$$

Решение.

Ветви параболы $y = 2x + 2 - x^2$ направлены вниз, следовательно она ограничена сверху значением, которое она достигает в своей вершине:

$$x_t = -\frac{b}{2a} = 1, y_t = 3.$$

Ветви параболы $y = x^2 - 2x + 2$, стоящей в показателе, направлены вверх, значит она ограничена снизу значением, которое она достигает в своей вершине:

$$x_t = -\frac{b}{2a} = 1, y_t = 1.$$

Вместе с этим ограниченной снизу оказывается и функция $y = 3^{x^2 - 2x + 2}$, стоящая в правой части уравнения. Она достигает своего наименьшего значения в той же точке, что и парабола, стоящая в показателе, и это значение равно $3^1 = 3$. Итак, исходное неравенство может оказаться верным только в том случае, если функция слева и функция справа принимают в одной точке значение, равное 3 (пересечением областей значений этих функций является только это число). Это условие выполняется в единственной точке $x = 1$.

Ответ: 1.

Заключение.

Овладение методикой решения показательных неравенств, мне кажется, очень полезным: оно повышает умственные и творческие способности учащихся, перед ними открываются совершенно новые горизонты. При решении неравенств ученики приобретают первые навыки исследовательской работы, обогащается их математическая культура, развиваются способности к логическому мышлению. У школьников формируются такие качества личности как целеустремленность, целеполагание, самостоятельность, которые будут полезны им в дальнейшей жизни. А также происходит повторение, расширение и глубокое усвоение учебного материала.

Для того, чтобы научиться решать показательные неравенства, необходимо постоянно тренироваться в их решении. Чтобы учащиеся смогли успешно сдать ЕГЭ, я считаю, что необходимо уделять больше внимания решению показательных неравенств на учебных занятиях, либо на дополнительных, факультативах и кружках.

Приложение.

1. Решение неравенств с параметрами

Для каждого значения a решить неравенство

$$3^{\sqrt{x+1}} > 2^{a-1}.$$

Решение.

Запишем неравенство в виде:

$$3^{\sqrt{x+1}} > 2^{(a-1)\log_3 2} \Leftrightarrow \sqrt{x+1} > (a-1)\log_3 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1) \begin{cases} a-1 \geq 0, \\ (a+1) > (a-1)^2 \log_3^2 2; \end{cases} \\ 2) \begin{cases} a-1 < 0, \\ x+1 \geq 0; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1) \begin{cases} a \geq 1, \\ x > -1 + (a-1)^2 \log_3^2 2; \end{cases} \\ 2) \begin{cases} a < 1, \\ x \geq -1; \end{cases} \end{cases}$$

Ответ: при $a < 1$, $x \geq -1$; при $a \geq 1$, $x > -1 + (a-1)^2 \log_3^2 2$

2. Рассмотрим следующий тип неравенств: $(f(x))^{\varphi(x)} < 1$; $(f(x))^{\varphi(x)} > 1$.

Решение.

$$(f(x))^{\varphi(x)} < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1) \begin{cases} 0 < f(x) < 1, \\ \varphi(x) > 0; \end{cases} \\ 2) \begin{cases} f(x) > 1, \\ \varphi(x) < 0; \end{cases} \end{cases}$$

Аналогично решается и неравенство вида $(f(x))^{\varphi(x)} > 1$.

$$(f(x))^{\varphi(x)} > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1) \begin{cases} 0 < f(x) < 1, \\ \varphi(x) < 0; \end{cases} \\ 2) \begin{cases} f(x) > 1, \\ \varphi(x) > 0; \end{cases} \end{cases}$$

3. Решить неравенство $|x|^{x^2-x-2} < 1$

Решение.

По данной схеме неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} 1) \begin{cases} 0 < |x| < 1, \\ x^2 - x - 2 > 0; \end{cases} \\ 2) \begin{cases} |x| > 0, \\ x^2 - x - 2 < 0; \end{cases} \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1) \begin{cases} -1 < x < 0; 0 < x < 1, \\ x < -1; x > 2; \end{cases} \\ 2) \begin{cases} x < -1; x > 1, \\ -1 < x < 2; \end{cases} \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1) \emptyset \\ 2) 1 < x < 2 \end{array} \right] \Leftrightarrow 1 < x < 2$$

Ответ: $1 < x < 2$

4. Сведение к рациональному неравенству, которое решаем применяя метод интервалов для непрерывных функций.

$$\frac{2^{x-1} + 6 \cdot 4^x + 1}{3 \cdot 4^x - 10 \cdot 2^{x-1} - 28} \geq -1 \Leftrightarrow \frac{9 \cdot 2^{2x} - 4,5 \cdot 2^x - 27}{3 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 2^x - 28} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x = t, \\ t > 0, \\ \frac{t^2 - 0,5t - 3}{3t^2 - 5t - 28} \geq 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x = t, \\ t > 0, \\ \frac{(t-2)(t+1,5)}{(t+3,5)(t-4)} \geq 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x = t, \\ t > 0, \\ \left[\begin{array}{l} t < -3,5 \\ -1,5 \leq t \leq 2 \\ t > 4 \end{array} \right] \end{array} \right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x = t, \\ \left[\begin{array}{l} 0 < t \leq 2, \\ t > 4 \end{array} \right] \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x \leq 2 \\ 2^x > 4 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq 1 \\ x > 2 \end{array} \right]$$

Ответ: $-\infty; 1] \cup (2; +\infty)$

5. Из предложенных неравенств выбрать наиболее рациональный способ для их решения:

а) $2^{2x+1} + 3^{2x+1} > 5 \cdot 6^x$

Ответ: однородное неравенство, делим обе части, например, на 3^{2x} и

введение новой переменной $t = \left(\frac{2}{3}\right)^x$.

б) $\frac{5+4^x}{2^{x+1}-1} \geq 3$

Ответ: с помощью замены $t = 2^x$ сводим к решению дробно-рационального неравенства.

в) $8^x + 6 \cdot 2^x < 7$

Ответ: решается функционально-графическим способом.

з) $5^x > 25^{2x}$

Ответ: использование свойства монотонности показательной функции.

Список и источники литературы

1. Денищева Л.О., Глазков Ю.А., Краснянская К.А., Рязановский А.Р., Семенов П.В. Единый государственный экзамен 2008. Математика. Учебно-тренировочные материалы для подготовки учащихся / ФИПИ – М.: Интеллект-Центр, 2007.
2. ЕГЭ 2011. Математика. Типовые тестовые задания /под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», 2011.
3. Единый государственный экзамен 2013. Математика. Универсальные материалы для подготовки учащихся / ФИПИ – М.: Интеллект-Центр, 2013.
4. Задачи письменного экзамена по математике за курс средней школы. Условия и решения. Вып. 1-6, 8, 12, 14, 18, 25. – М.: Школьная Пресса, – (Библиотека журнала «Математика в школе»), 1993-2003.
5. <http://eek.diary.ru/> – сайт по оказанию помощи абитуриентам, студентам, учителям по математике.
6. www.egemathem.ru – единый государственный