

**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ
ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ
По дисциплине: Элементы высшей математики**

Специальность: 09.02.01 Компьютерные системы и комплексы

Составитель: Н. Б. Чопорова, преподаватель ГБПОУ ВО «Воронежский техникум
строительных технологий»

СОДЕРЖАНИЕ

1. Пояснительная записка	4
2. Перечень практических работ	5
3. Инструктивно-методические указания по выполнению практических работ.....	6
Практическая работа №1	6
Практическая работа № 2	7
Практическая работа № 3	11
Практическая работа № 4	13
Практическая работа № 5	14
Практическая работа № 6	18
Практическая работа № 7	21
Практическая работа № 8	24
Практическая работа № 9	27
Практическая работа № 10	29

1. Пояснительная записка

Учебная дисциплина «Элементы высшей математики» является частью примерной основной профессиональной образовательной программы в соответствии с ФГОС по специальности 09.02.01 Компьютерные системы и комплексы, относится к профессиональному циклу и является естественно – научной дисциплиной. Она позволяет студентам приобрести ряд общих умений, необходимых для усвоения высшей математики, использование ее для изучения общепрофессиональных и специальных дисциплин, в курсовом и дипломном проектировании.

Одним из средств достижения этого являются практические работы, выполняемые студентами в курсе «Элементы высшей математики». Количество практических работ и их тематика соответствует рабочей программе по дисциплине. Каждый студент должен выполнить весь объем практических работ по «Элементам высшей математики».

Практические работы выполняются с целью:

- обобщения, систематизации и углубления теоретических знаний по дисциплине;
- закрепления умений и навыков по дисциплине;
- выработки навыков самостоятельной учебно-профессиональной деятельности.

Каждая практическая работа содержит краткие методические рекомендации, теоретические вопросы.

Требования к выполнению и оформлению практических работ

1. Практическая работа выполняется в тетради для практических работ.
2. Работа должна быть выполнена аккуратно и разборчиво с соблюдением общих требований:
 - соблюдать абзацы, всякую новую мысль начинать с красной строки;
 - важные формулы, равенства выделять в отдельные строки;
 - правильно применять математические символы.
3. В расчетной части практической работы необходимо записать краткое содержание задания и его решение, при необходимости надо перевести данные в систему СИ. Так как задания составляются с учетом специальности то, при необходимости, надо применять знания, приобретенные в других дисциплинах. Решение задачи должно сопровождаться краткими обоснованиями (пояснениями) своих действий. Решение следует выполнять по установленным алгоритмам, нумеруя шаги. При выполнении работы студент может использовать конспект лекций, рекомендуемую литературу, а также обращаться за консультацией к преподавателю.

4. Графическая часть задания должна содержать чертеж, график.

Чертежи выполняются карандашом с использованием чертежных инструментов, соблюдая масштаб (при необходимости в цвете).

5. Решение заканчивается ответом. Ответ пишется подробно и должен отвечать на вопросы:

- что исследовалось в работе;
- какой получен результат;
- как можно интерпретировать результат исследования.

6. После выполнения задания практической работы нужно написать вывод. Он должен соответствовать цели работы, быть подробным и отвечать на вопросы:

- какие умения получил студент при выполнении работы;
- какие сведения из курса дисциплины и других дисциплин использовались в работе.

Критерий оценки:

- «5», если выполнено работа полностью;
- «4», если выполнено 75% - 90% заданий
- «3», если выполнено 60% - 75% заданий
- «2», если выполнено меньше 60% заданий

2. Перечень практических работ

№ п/п	Наименование работы	Количество часов
Практическая работа № 1	Нахождение обратной матрицы. Решение простейших матричных уравнений.	2
Практическая работа № 2	Решение систем линейных уравнений матричным методом, по формулам Крамера и методом Гаусса.	2
Практическая работа № 3	Действия над комплексными числами в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.	2
Практическая работа № 4	Операции над векторами. Вычисление скалярного, векторного и смешанного произведения векторов	2
Практическая работа № 5	Нахождение пределов функций	2
Практическая работа № 6	Исследование функции на непрерывность и точки разрыва	2
Практическая работа № 7	Полное исследование функции. Построение графиков	2
Практическая работа № 8	Вычисление площадей плоских фигур, длины дуги, объемов тел вращения, площадей поверхностей тел вращения.	2
Практическая работа № 9	Решение дифференциальных уравнений первого порядка.	2
Практическая работа № 10	Решение дифференциальных уравнений второго порядка	2

3.Инструктивно-методические указания по выполнению практических работ

Практическая работа № 1

Нахождение обратной матрицы. Решение простейших матричных уравнений

Цель работы: формирование навыков вычисления обратных матриц второго и третьего порядков, решения простейших матричных уравнений.

На выполнение практической работы отводится 2 часа.

Требования к выполнению практической работы:

1. Ответить на теоретические вопросы;
2. Оформить задания в тетради для практических работ.

Оборудование: микрокалькулятор, конспекты занятий, карточки-задания, учебник Богомолов Н.В. Практические занятия по математике, В.П. Григорьев, Ю.А. Дубинский Элементы высшей математики.

3. Методические рекомендации:

Алгоритм нахождения обратной матрицы:

1. Находят определитель матрицы A .
2. Находят алгебраические дополнения всех элементов a_{ij} матрицы A и записывают новую матрицу.
3. Меняют местами столбцы полученной матрицы (транспонируют матрицу).
4. Умножают полученную матрицу на $\frac{1}{D}$.

Алгоритм решения матричного уравнения:

1. Найти обратную матрицу A^{-1} .
2. Найти произведение обратной матрицы A^{-1} на матрицу столбец B , т.е. $A^{-1} B$.
3. Пользуясь определением равных матриц, записать ответ.

Задания для самостоятельной работы

1. Вычислить матрицу, обратную матрице A :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Вопросы для самоконтроля:

1. Что называется матрицей?
2. Что значит «транспонировать» матрицу?
3. Какая матрица называется обратной по отношению к данной?
4. Каков порядок вычисления обратной матрицы?
5. Как записать простейшее матричное уравнение?
6. Как решить матричное уравнение?

Написать вывод по выполненной работе.

Практическая работа № 2

Решение систем линейных уравнений матричным методом, по формулам Крамера и методом Гаусса.

Цель работы: формирование навыков решения системы двух линейных уравнений матричным методом, по формулам Крамера и методом Гаусса. Формирование навыков составления и вычисления определителей второго и третьего порядка.

На выполнение практической работы отводится 2 часа.

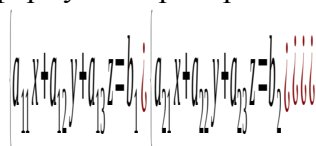
Требования к выполнению практической работы:

1. Ответить на теоретические вопросы;
2. Оформить задания в тетради для практических работ.

Оборудование: микрокалькулятор, конспекты занятий, карточки-задания, учебник Богомолов Н.В. Практические занятия по математике, В.П. Григорьев, Ю.А. Дубинский Элементы высшей математики.

Методические рекомендации:

Решить систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными матричным методом, по формулам Крамера и методом Гаусса.



(1)

Алгоритм решения системы

трех линейных уравнений матричным методом:

- 1) Составить матричное уравнение $AX = B$.
- 2) Найти обратную матрицу A^{-1} .
- 3) Найти произведение матрицы A^{-1} на матрицу-столбец свободных членов B , т.е. $A^{-1}B$.
- 4) Пользуясь определением равных матриц, записать ответ.

по формулам Крамера:

- 1) Вычислим определитель системы Δ , составленный из коэффициентов неизвестных;
- 2) Вычислим определитель Δ_x , получающийся из определителя Δ заменой столбца коэффициентов при x столбцом свободных членов;
- 3) Вычислим определитель Δ_y , получающийся из определителя Δ заменой столбца коэффициентов при y столбцом свободных членов;
- 4) Вычислим определитель Δ_z , получающийся из определителя Δ заменой столбца коэффициентов при z столбцом свободных членов;
- 5) Найдем значения x , y и z по формулам Крамера.

Метод Гаусса состоит в следующем: систему уравнений приводят к эквивалентной ей системе с треугольной матрицей. Эти действия называют прямым ходом. Из полученной треугольной системы переменные находят с помощью последовательных подстановок (обратный ход).

Примеры

Решить систему линейных уравнений тремя способами

$$\begin{cases} x - 4y - 2z = -3 \\ 3x + y + z = 5 \\ 3x - 5y - 6z = -9 \end{cases}$$

- 1) методом Крамера;
- 2) матричным методом;
- 3) методом Гаусса.

Решение. 1) Решим систему уравнений методом Крамера. Найдем главный определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & -6 \end{vmatrix} = -49$$

Вспомогательные определители.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 5 & 1 & 1 \\ -9 & -5 & -6 \end{vmatrix} = -49$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 3 & -9 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & -5 & -9 \end{vmatrix} = -98$$

Решение системы уравнений

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 1; y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = 0; z = \frac{\Delta_z}{\Delta}.$$

2) Решим систему матричным методом. Запишем исходную систему уравнений в матричном виде

$$AX = B,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & -6 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Решение матричного уравнения имеет вид

$$X = A^{-1} \cdot B$$

где A^{-1} - матрица, обратная к матрице A . Обратная матрица находится по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

где Δ - определитель матрицы A , A_{ij} - алгебраическое дополнение элемента a_{ij} определителя матрицы A . Вычислим алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} = -1; A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} = -14;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2; A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 21;$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix}=0; A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-7;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}=-18; A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}=-7;$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=13$$

Таким образом,

$$A^{-1}=\frac{-1}{49}\begin{pmatrix} -1 & -14 & -2 \\ 21 & 0 & -7 \\ -18 & -7 & 13 \end{pmatrix}$$

откуда

$$X=A^{-1}B=\frac{-1}{49}\begin{pmatrix} -1 & -14 & -2 \\ 21 & 0 & -7 \\ -18 & -7 & 13 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix}=\frac{-1}{49}\begin{pmatrix} 3-70+18 \\ -63+0+63 \\ 54-35-117 \end{pmatrix}=\frac{-1}{49}\begin{pmatrix} -49 \\ 0 \\ -98 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Следовательно, $x=1, y=0, z=2$.

4) Метод Гаусса основан на приведении системы уравнений к треугольному виду. Это достигается последовательным исключением неизвестных из уравнений системы.

Умножим первое уравнение на -3 и прибавим его ко второму и третьему уравнениям. В результате получим систему, в которой неизвестное x исключено из второго и третьего уравнений.

$$\begin{cases} x-4y-2z=-3 \\ 13y+7z=14 \\ 7y=0 \end{cases}$$

Теперь разделим второе уравнение на 13, затем умножим его на -7 и прибавим его к третьему уравнению. В результате получим систему уравнений, в которой исключено из третьего уравнения неизвестное y .

$$\begin{cases} x-4y-2z=-3 \\ y+\frac{7}{13}z=\frac{14}{13} \\ \frac{-49}{13}z=\frac{-98}{13} \end{cases}$$

Приведение исходной системы уравнений к треугольному виду называется прямым ходом метода Гаусса. Далее реализуем обратный ход метода Гаусса.

$$z=\frac{-98}{13}:\left(\frac{-49}{13}\right)=2$$

$$y=\frac{14}{13}-\frac{7}{13}\cdot 2=0$$

$$x=-3+4\cdot 0+2\cdot 2=1$$

Таким образом, $x=1, y=0, z=2$.

Задания для самостоятельной работы

Решить систему трех линейных уравнений матричным методом, по формулам Крамера и методом Гаусса.

$$1. \begin{cases} 5x + 8y + z = 2 \\ 3x - 2y + 6z = -7 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x - 7y + z = 4 \\ 3x + y - z = 17 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x - 3y + z = -7 \\ x + 4y + 2z = -1 \end{cases}$$

Вопросы для самоконтроля:

1. Как вычислить определитель третьего порядка?
2. Какие способы вычисления определителя вам известны?
3. Опишите метод решения систем линейных уравнений матричным методом.
4. Запишите формулы Крамера.
5. Опишите метод Гаусса.
6. Когда система имеет единственное решение, не имеет решения, имеет бесконечное множество решений?

Написать вывод по выполненной работе.

Практическая работа № 3

Действия над комплексными числами в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.

Цель работы: формирование навыков действия с комплексными числами и перевода их из одной формы в другую.

На выполнение практической работы отводится 2 часа.

Требования к выполнению практической работы:

1. Ответить на теоретические вопросы;
2. Оформить задания в тетради для практических работ.

Оборудование: микрокалькулятор, конспекты занятий, карточки-задания, учебник Богомолов Н.В. Практические занятия по математике, В.П. Григорьев, Ю.А. Дубинский Элементы высшей математики.

Методические рекомендации:

1. Определить модуль и аргумент комплексного числа, заданного в алгебраической форме по алгоритму «Перевод комплексного числа из алгебраической формы в тригонометрическую форму»
2. Записать формулу извлечения корня n -ой степени
3. Выяснить сколько значений корня из этого числа существует
4. Вычислить аргумент каждого значения корня
5. Записать все значения корня n -ой степени из заданного числа в показательной форме
6. Изобразить все значения корня на комплексной плоскости в векторной форме
7. Внимание:
 - складывать и вычитать комплексные числа - в алгебраической форме;
 - умножать и делить комплексные числа - в тригонометрической или показательной форме (показательная форма наиболее часто применима в электротехнике, ТОЭ);
 - возводить в степень и извлекать корень - в тригонометрической или показательной форме;
 - если значения корня n -ой степени вычислены верно, то их количество равно показателю корня и на чертеже образуется правильный n -угольник.

Примеры

1. Даны комплексные числа $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 5 - 7i$. Найти: а) $z_1 + z_2$; б) $z_1 - z_2$; в) $z_1 z_2$.

Решение.

$$\text{а) } z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (5 - 7i) = 2 + 3i + 5 - 7i = (2 + 5) + (3i - 7i) = 7 - 4i$$

$$\text{б) } z_1 - z_2 = (2 + 3i) - (5 - 7i) = 2 + 3i - 5 + 7i = (2 - 5) + (3i + 7i) = -3 + 10i$$

$$\text{в) } z_1 z_2 = (2 + 3i)(5 - 7i) = 10 - 14i + 15i - 21i^2 = 10 - 14i + 15i + 21 = (10 + 21) + (-14i + 15i) = 31 + i.$$

2. Найти z^6 , если $z = -\sqrt{3} + 1$.

Решение. Запишем число z в тригонометрической форме, учитывая, что $a = -\sqrt{3}$, $b = 1$.

Найдем $r = \sqrt{a^2 + b^2}; r = \sqrt{3+1} = 2$. Точка z расположена во II четверти. Составим отношения $\cos \varphi = \frac{a}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin \varphi = \frac{b}{r} = \frac{1}{2}$. Учитывая, что точка z расположена во II четверти, находим $\arg z = \varphi = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$. Следовательно, $z = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$.

Согласно формуле возведения в степень имеем $|z^6| = 2^6, \arg(z^6) = \frac{5\pi}{6} \cdot 6$ и, значит,
 $z^6 = 2^6 \left(\cos \frac{5\pi}{6} \cdot 6 + i \sin \frac{5\pi}{6} \cdot 6 \right) = 64 (\cos 5\pi + i \sin 5\pi) = 64 (\cos \pi + i \sin \pi) = 64 (-1 + i \cdot 0) = -64$

3. Записать число $z = -5i$ в показательной форме.

Решение. Чтобы представить число z в виде $z = r e^{i\varphi}$, нужно найти модуль и аргумент числа z . Здесь $a = 0, b = -5; \text{тогда } r = \sqrt{0 + (-5)^2} = 5; \varphi = \frac{3\pi}{2}$, так как точка z лежит на мнимой оси комплексной плоскости. Зная r и φ , получим $z = 5 e^{\frac{3\pi}{2}i}$.

Задания для самостоятельной работы

Выполнить действия с комплексными числами в алгебраической, тригонометрической и показательной форме

Вариант 1.

- 1) Выполнить действия в алгебраической форме: $(5 - 2i)^2, (-1 + 3i)^3; \frac{(2 - 3i)^2}{-i + 5}$.
- 2) Вычислить $i^{15} + i^{24} - i^{49} - i^{37} \cdot i^{51}$.
- 3) Решите уравнение $x^2 + 4x + 5 = 0$
- 4) Найдите z^{10} в тригонометрической форме, если $z = 1 - i\sqrt{3}$.
- 5) Найдите в показательной форме $\sqrt[3]{-i}$.

Вариант 2.

- 1) Выполнить действия в алгебраической форме:
 $(3 - 5i)^{\square} (2 - 3i); (5 + 3i)^{\square} (5 - 2i); \frac{(6 - 2i)^2}{-3 + i} + i^{15}$.
- 2) Вычислите $(i^{13} + i^{17}) \cdot 2i - (i^4 + i^{24}) \cdot 6$.
- 3) Решите уравнение $2,5x^2 - x + 1 = 0$
- 4) Найдите z^{\square} в тригонометрической форме, если $z = (3 - 3i\sqrt{3})(5\sqrt{3} + 5i)$.
- 5) Найдите z^6 в показательной форме, если $z = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$

Вопросы для самоконтроля:

1. Какие числа называются комплексными?
2. Как геометрически изображаются комплексные числа?
3. Перечислить формы комплексного числа.
4. Что такое i ?
5. Что называется модулем комплексного числа?
6. Что называется аргументом комплексного числа?
7. По какой форме вычисляется модуль комплексного числа?
8. Изобразить комплексное число и показать его аргумент
9. Чему равен квадрат мнимой единицы?
10. Какие числа называются сопряженными и как они обозначаются?
11. Запишите формулу Муавра. Зачем она нужна?
12. Расскажите алгоритм перевода комплексного числа из алгебраической формы в показательную форму.

Написать вывод по выполненной работе.

Практическая работа № 4

Операции над векторами. Вычисление скалярного, векторного и смешанного произведения векторов

Цель работы: формирование навыков нахождения координат векторов, вычисления модуля вектора, нахождения скалярного, векторного и смешанного произведения векторов.

На выполнение практической работы отводится 2 часа.

Требования к выполнению практической работы:

1. Ответить на теоретические вопросы;
2. Оформить задания в тетради для практических работ.

Оборудование: микрокалькулятор, конспекты занятий, карточки-задания, учебник Богомолов Н.В. Практические занятия по математике, В.П. Григорьев, Ю.А. Дубинский Элементы высшей математики.

Методические рекомендации:

1. Операции над векторами.

Если векторы заданы в декартовой системе координат своими координатами, то:

- 1) При сложении векторов их одинаковые координаты складываются;
- 2) При вычитании векторов их одинаковые координаты вычитаются;
- 3) При умножении вектора на число каждая координата вектора умножается на это число.

Необходимо знать, чему равна длина вектора, что это корень квадратный из суммы квадратов его координат.

2. Нахождение скалярного, векторного и смешанного произведений векторов.

- 1) Скалярное произведение двух векторов – это число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.
- 2) Векторное произведение двух векторов – это вектор. Для нахождения векторного произведения необходимо вспомнить правила вычисления определителя третьего порядка. Знать геометрический и физический смысл векторного произведения.
- 3) Смешанное произведение трех векторов – это определитель третьего порядка. Необходимо вспомнить правила нахождения определителя третьего порядка. Смешанное произведение трех векторов по модулю равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах. А объем пирамиды равен $\frac{1}{6}$ части объема этого параллелепипеда.

Примеры

1. Найти координаты вектора \overrightarrow{AB} , если $A(1, 3, 2)$, $B(5, 8, -1)$.

Решение. Поскольку координаты вектора равны разности соответствующих координат конца и начала вектора, получаем $\overrightarrow{AB} = (5 - 1, 8 - 3, -1 - 2) = (4, 5, -3)$.

2. Для векторов $a = -2i + j + 2k$ и $b = 2i + 4j + 4k$ вычислить: а) (a, b) ; б) $|a|, |b|$; в) $\cos \angle (a, b)$;
Решение. Из формул для скалярного произведения векторов и модуля вектора получаем $(a, b) = (-2) \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 4 = 8$, $|a| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} = 3$, $|b| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2} = 6$. Косинус угла между двумя ненулевыми векторами a и b может быть выражен через скалярное произведение и модули векторов a и b : $\cos \angle (a, b) = \frac{(a, b)}{|a||b|} = \frac{8}{3 \cdot 6} = 0,44$.

Задания для самостоятельной работы

1. Найти координаты вектора $a = \overrightarrow{AB}$, если $A(1, 2, 3)$, $B(3, -2, 1)$.
2. Для векторов $a = i + 2j + 2k$ и $b = 6i - 3j - 6k$ вычислить: а) (a, b) ; б) $|a|, |b|$; в) $\cos \angle (a, b)$;
3. Найти векторное произведение векторов $a = i + j + k$ и $b = i - j + k$ и вычислить площадь параллелограмма, натянутого на эти векторы.
4. Вычислить смешанное произведение векторов $a = i + j + k$, $b = i - j + k$, $c = -i + j + k$, и вычислить объём параллелепипеда, построенного на векторах a , b и c .

Вопросы для самоконтроля:

1. Что называется вектором?
2. Какие операции можно выполнять с векторами?
3. Что называется скалярным произведением векторов?
4. Что называется векторным произведением векторов?
5. Что называется смешанным произведением векторов?

Написать вывод по выполненной работе.

Практическая работа № 5

Нахождение пределов функций

Цель работы: формирование навыков нахождения пределов функций, раскрытия

неопределенностей $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$, применения замечательных пределов при вычислении пределов функций.

На выполнение практической работы отводится 2 часа.

Требования к выполнению практической работы:

1. Ответить на теоретические вопросы;
2. Оформить задания в тетради для практических работ.

Оборудование: микрокалькулятор, конспекты занятий, карточки-задания, учебник Богомолов Н.В. Практические занятия по математике, В.П. Григорьев, Ю.А. Дубинский Элементы высшей математики.

Методические рекомендации:

1. Подставьте предельное значение аргумента в функцию и вычислите ответ. Если есть неопределенность, определите ее вид.

2. Если есть неопределенность $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$, раскройте ее по правилам раскрытия неопределенности.

4. Внимание: если функция содержит переменную не только в основании, но и в показателе степени, то надо применить логарифмическую производную.

Примеры вычисления пределов.

$$\lim_{x \rightarrow -1} (2x^3 - 5x^2 + x - 4)$$

1)

Решение

Подставим в пределе вместо x число, к которому оно стремится и получим результат:

$$\lim_{x \rightarrow -1} (2x^3 - 5x^2 + x - 4) = \lim_{x \rightarrow -1} (2(-1)^3 - 5(-1)^2 + (-1) - 4) = -12$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 5x + 7}{3x^3 + 4x^2 - x + 2}$$

Решение

При $x \rightarrow \infty$ имеем неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$. Чтобы раскрыть эту неопределенность, разделим числитель и знаменатель на x с наибольшим показателем степени, то есть на x^3 . Тогда получим

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 5x + 7}{3x^3 + 4x^2 - x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2} + \frac{7}{x^3}}{3 + \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}} = \frac{2}{3}$$

Так как $\frac{3}{x}, \frac{5}{x^2}, \frac{7}{x^3}, \frac{4}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{2}{x^3} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.

$$3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{8x}$$

Решение

И числитель и знаменатель дроби при $x \rightarrow 0$ стремятся к нулю. Имеем неопределенность $\frac{0}{0}$. Умножим числитель и знаменатель на выражение

$$(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}). \text{ Получим } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{8x}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x-1+x}{8x\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{8x\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}} \quad \text{?} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4\sqrt{1+0}\sqrt{1-0}} = \frac{1}{8} \quad \text{?} \\
&\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{8x\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}} = \text{?}
\end{aligned}$$

$$4) \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 5x + 2}{2x^3 + 7x^2 + 6x}$$

Решение

И числитель и знаменатель дроби при $x \rightarrow 0$ стремятся к нулю. Имеем неопределенность $\frac{0}{0}$. Разложим числитель и знаменатель на множители и сократим на множитель, приводящий к неопределенности.

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 5x + 2}{2x^3 + 7x^2 + 6x} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2(x+2)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{x(2x^2 + 7x + 6)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2(x+2)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{2x(x+2)\left(x+\frac{3}{2}\right)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x+1}{x(2x+3)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2(-2)+1}{2(-2)+3} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + \sin x}{x}$$

5)

Решение

Имеем неопределенность $\frac{0}{0}$. Воспользуемся первым замечательным пределом

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Получим

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin 3x + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 0 + 1 = 1$$

$$6) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{9}{x}\right)^x$$

Решение

Имеем неопределенность вида 1^∞ . Воспользуемся вторым замечательным пределом

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Получим

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{9}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{9}}\right)^{\frac{x}{9} \cdot 9} = e^9$$

Задания для самостоятельной работы

Вычислить пределы функций:

Задания на оценку «3»			
№ п/п	Вычислить пределы	№ п/п	Вычислить пределы
1	$\lim_{x \rightarrow 2} (5x^3 - 6x^2 + x - 5)$	6	$\lim_{x \rightarrow 3} (5x^3 - 100)$
2	$\lim_{x \rightarrow 3} (x^3 + x - 5)$	7	$\lim_{x \rightarrow -2} (4x^5 - 50x)$
3	$\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 - x^2 + 1)$	8	$\lim_{x \rightarrow 3} (2x^3 - 3x + 1)$
4	$\lim_{x \rightarrow -1} (2x^3 - 5x^2 + x - 4)$	9	$\lim_{x \rightarrow -1} (4x^5 - 2x^2 + 3)$
5	$\lim_{x \rightarrow 0} (3x^3 + x^2 - 8x + 10)$	10	$\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 3x^2 + x)$

Задания на оценку «4»			
№ п/п	Вычислить пределы	№ п/п	Вычислить пределы
1	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 7x + 6}{x^3 - 5x^2 + 2x + 8}$	6	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x^2 + 5x + 6}$
2	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 5x + 2}{2x^3 + 7x^2 + 6x}$	7	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 2x}{x^3}$
3	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x^3}{3x^4 + x^5 - 2x^2}$	8	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{4}}{x^2}$

4	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-4x^3+3x^4}{(x-1)^3}$	9	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x \cdot \cos x}{x}$
5	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3-3x^2+2x-2}{(x-1)^3}$	10	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x \cdot \sin x}{x^2}$

Задания на оценку «5»			
№ п/п	Вычислить пределы	№ п/п	Вычислить пределы
1	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x}$	6	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin x^2}$
2	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + \sin x}{x}$	7	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4\sqrt{x}}{\operatorname{arctg}(2\sqrt{x})}$
3	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x}$	8	$\lim_{x \rightarrow -2} (2x+5)^{\frac{3}{x+2}}$
4	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos x}{x}$	9	$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \operatorname{ctg} 4x$
5	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$	10	$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \operatorname{ctg} 3x$

Вопросы для самоконтроля:

1. Что называется пределом функции в точке?
2. Что называется пределом функции на бесконечности?
3. Какие Вы знаете замечательные пределы?
4. Какие бесконечно малые функции называются эквивалентными?
5. Какие виды неопределенностей вы знаете?
6. Что значит «раскрыть неопределенность»?

Написать вывод по выполненной работе.

Практическая работа № 6

Исследование функции на непрерывность и точки разрыва

Цель работы: формирование навыков исследования функции на непрерывность и устанавливания точек разрыва.

На выполнение практической работы отводится 2 часа.

Требования к выполнению практической работы:

3. Ответить на теоретические вопросы;
4. Оформить задания в тетради для практических работ.

Оборудование: микрокалькулятор, конспекты занятий, карточки-задания, учебник Богомолов Н.В. Практические занятия по математике, В.П. Григорьев, Ю.А. Дубинский Элементы высшей математики.

Методические рекомендации:

1. Вычислить односторонние пределы в каждой граничной точке
 2. Вычислить значение функции в этой точке
 3. Сравнить значение предела функции справа, значение функции слева и значение функции в этой точке, если:
 - оба предела существуют и равны значению функции в этой точке, то функция в этой точке непрерывна;
 - оба предела существуют, но не равны друг другу, то исследуемая точка является точкой разрыва 1-го рода;
 - хотя бы один из односторонних пределов не существует, то исследуемая точка является точкой разрыва 2-го рода;
- Внимание: кусочно-непрерывные функции надо исследовать во всех граничных точках.

Примеры выполнения задания.

Исследовать кусочно-непрерывную функцию на непрерывность, установить точки разрыва и построить график.

$$f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 4 - 2x, & 1 < x < 2,5 \\ 2x + 5, & x \geq 2,5 \end{cases}$$

Решение

Неэлементарная функция $f(x)$ определена для всех значений $x \geq 0$. Она может иметь разрыв в точках $x=1$ и $x=2,5$, где меняется ее аналитическое выражение. Во всех остальных точках своей области определения функция $f(x)$ непрерывна, поскольку каждая из формул, которыми она задана, определяет собой элементарную функцию, непрерывную в своем интервале изменения аргумента x .

Исследуем точки $x=1$ и $x=2,5$:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} 2\sqrt{x} = 2; \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} (4 - 2x) = 2$$

Согласно условию, значение функции $f(x)$ в точке $x=1$ определяется первой формулой

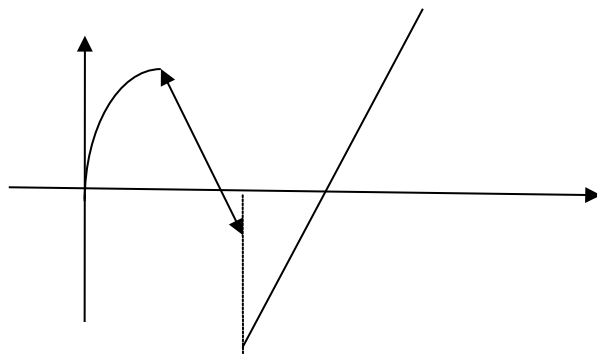
$$f(1) = 2\sqrt{1} = 2$$

Следовательно, в точке $x=1$ выполняются все условия непрерывности: функция определена в окрестности точки $x=1$ и $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = f(1)$

Поэтому в точке $x=1$ функция $f(x)$ непрерывна.

$$б) \lim_{x \rightarrow 2,5-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2,5-0} (4 - 2x) = -1; \lim_{x \rightarrow 2,5+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2,5+0} (2x - 7) = -2$$

Здесь левый и правый пределы конечны, но не одинаковы, т.е. не выполняется второе условие непрерывности. Поэтому в точке $x=2,5$ функция имеет разрыв первого рода. Построим график.



Задания для самостоятельной работы

Исследовать кусочно-непрерывную функцию на непрерывность, установить точки разрыва и построить график.

Вариант 1

$$1. \quad f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ -(x-2)^2, & 0 < x < 1 \\ x-2, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$2. \quad f(x) = \begin{cases} \sin 2x, & x \leq 1 \\ x^2, & 1 < x \leq 2 \\ 3x-4, & x > 2 \end{cases}$$

Вариант 2

$$1. \quad f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 1 \\ x^3, & 1 < x \leq 2 \\ \sqrt{x}, & x > 2 \end{cases}$$

$$2. \quad f(x) = \begin{cases} x^2+3, & x \leq 0 \\ \sin x, & 0 < x \leq \pi \\ x-\pi, & x > \pi \end{cases}$$

Вопросы для самоконтроля:

1. Дайте определение функции непрерывной в точке?
2. Дайте определение левостороннего (правостороннего) предела функции в точке
3. Что такое точка разрыва функции?
4. Какая точка называется точкой разрыва 1-го рода?
5. Какая точка называется точкой разрыва II -го рода?
6. Приведите пример функции непрерывной на отрезке? На всей области определения? Приведите пример функции непрерывной на отрезке.

Написать вывод по выполненной работе.

Практическая работа № 7

Полное исследование функции. Построение графиков

Цель работы: формирование навыков исследования простых функций и построение их графиков.

На выполнение практической работы отводится 2 часа.

Требования к выполнению практической работы:

1. Ответить на теоретические вопросы;

2. Оформить задания в тетради для практических работ.

Оборудование: микрокалькулятор, конспекты занятий, карточки-задания, учебник Богомолов Н.В. Практические занятия по математике, В.П. Григорьев, Ю.А. Дубинский Элементы высшей математики.

Методические рекомендации:

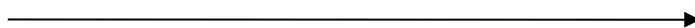
1. Выполнять исследование функции по плану:
 - найти область определения функции;
 - исследовать на четность и нечетность функции;
 - найти точки пересечения графика с осями координат;
 - исследовать на интервалы монотонности функции и экстремумы;
 - исследовать на промежутки выпуклости функции и точки перегиба;
 - исследовать на непрерывность, определить точки разрыва;
 - исследовать функцию на асимптоты.
2. При определении точек пресечения графика функции с осью Ox и критических точек может получиться уравнение выше второй степени, его можно решать с помощью деления многочленов.
3. Исследование на:
 - монотонность проводить по первой производной (алгоритм «Исследование функции на монотонность и экстремумы по первой производной»); экстремум по второй производной (алгоритм «Исследование функции на экстремумы по второй производной»);
 - интервалы выпуклости и точки перегиба - по второй производной (алгоритм «Исследование функции на выпуклость и точки перегиба по второй производной»).
4. Результаты исследования на монотонность, экстремумы, выпуклость и точки перегиба оформлять в таблицы.
5. При построении графика обязательно вычислять координаты дополнительных точек.

Пример выполнения задания

1. $y = x^3 - 12x + 4$. Исследовать функцию и построить ее график.

Решение.

- 1) Область определения функции интервал $(-\infty; \infty)$. Функция непрерывна во всей области определения.
- 2) Функция не является ни четной, ни нечетной, т.к.
 $f(-x) \neq f(x) \text{ и } f(-x) \neq -f(x)$
- 3) Если $x=0$, то $y=4$, т.е. график функции пересекает ось ординат в точке $(0; 4)$.
- 4) Имеем $y' = 0, y' = 3x^2 - 12, 3x^2 - 12 = 0; x_1 = -2, x_2 = 2$ критические точки функции. Исследуем функцию на монотонность и экстремум. Ее область определения разделится на промежутки $(-\infty; -2), (-2; 2), (2; \infty)$.



Значит, в промежутках $(-\infty; -2)$ и $(2; \infty)$ функция возрастает, а в промежутке $(-2; 2)$ – убывает. При $x = 2$ – минимум: $y_{\min} = 2^3 - 12 \cdot 2 + 4 = -12$. При

$x = -2$ функция имеет максимум: $y_{\max} = (-2)^3 - 12(-2) + 4 = -8 + 24 + 4 = 20$

- 5) Находим $y'' = (3x^2 - 12)' = 6x; 6x = 0; x = 0$. Определяем знаки второй производной слева и справа от точки $x = 0$

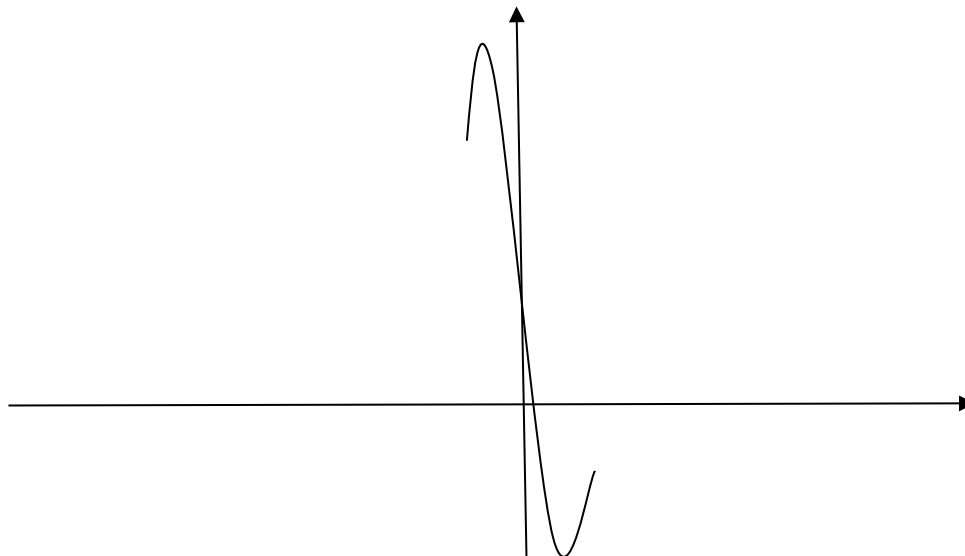


Следовательно, в промежутке $(-\infty; 0)$ кривая выпуклая вверх, а в промежутке $(0; \infty)$ – выпуклая вниз. При $x = 0$ имеем точку перегиба; ее ордината $y = 0 - 12 \cdot 0 + 4 = 4$.

Составим таблицу:

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; \infty)$
y'	+	0	-	-	-	0	+
y''	-	-	-	0	+	+	+
y	Возрастает	Максимум	Убывает	Точка	Убывает	Минимум	Возрастает,
	Выпуклая	м	выпуклая	перегиба	выпуклая	$y_{\min} = -12$	выпуклая
	вверх	$y_{\max} = 20$	вверх	$y = 4$	вниз		вниз

Построим график функции.



Задания для самостоятельной работы

Для данной функции $y = f(x)$ провести исследование по плану и построить ее график.

№ п/п	Вариант 1	№ п/п	Вариант 2
1	$y = x^2 + 2x - 3$	1	$y = x^2 + 5x + 4$
2	$y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 10$	2	$y = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 1$
3	$y = \frac{x}{x^2 - 4}$	3	$y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$

Вопросы для самоконтроля:

1. Дать определение производной.
2. Каков геометрический смысл производной?
3. Какая функция называется четной (нечетной, общего вида)? Какие особенности имеют их графики?
4. Какая функция называется периодической? Как выглядит ее график?
5. Как найти точки пересечения графика с осями координат?
6. Какая точка называется критической (стационарной)?
7. Каково необходимое условие существования экстремума? достаточное условие существования экстремума?
8. Что такое точка перегиба? Каково условие ее существования? Какая функция называется выпуклой вверх (вниз)?

Написать вывод по выполненной работе.

Практическая работа № 8

Вычисление площадей плоских фигур, длины дуги, объемов тел вращения, площадей поверхностей тел вращения.

Цель работы: формирование навыков вычисления площади плоской фигуры, длины дуги, объема тела вращения, площади поверхности тела вращения с помощью определенного интеграла.

На выполнение практической работы отводится 2 часа.

Требования к выполнению практической работы:

1. Ответить на теоретические вопросы;
2. Оформить задания в тетради для практических работ.

Оборудование: микрокалькулятор, конспекты занятий, карточки-задания, учебник Богомолов Н.В. Практические занятия по математике, В.П. Григорьев, Ю.А. Дубинский Элементы высшей математики.

Методические рекомендации:

Решение задачи начинать с изображения плоской фигуры. При этом, если график невозможно построить с помощью простейших преобразований основной функции, необходимо провести исследование функции по плану. По рисунку выбрать формулу, необходимую для вычисления площади. Найти пределы интегрирования. Вычислить определенный интеграл по формуле Ньютона – Лейбница

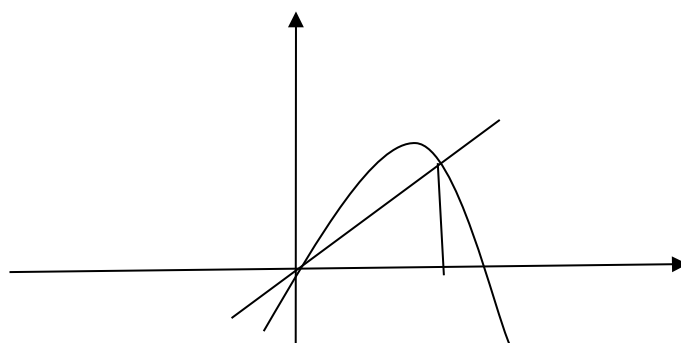
5. Для вычисления объема необходимо нарисовать второй рисунок - тело вращения.
6. Выбрать формулу для вычисления объема в зависимости от заданной оси вращения, причем пределы интегрирования остаются прежними.
7. Определенный интеграл вычислять непосредственно, подстановкой или по частям.

Примеры решения задания

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными в декартовой системе координат. Сделать рисунок. $y = 5x - 3x^2$, $y = 2x$

Решение.

Построим графики функций.



Найдем точки пересечения графиков функций. $5x - 3x^2 = 2x$,

$3x - 3x^2 = 0$, $3x(1 - x) = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Искомая площадь ограничена параболой и прямой.

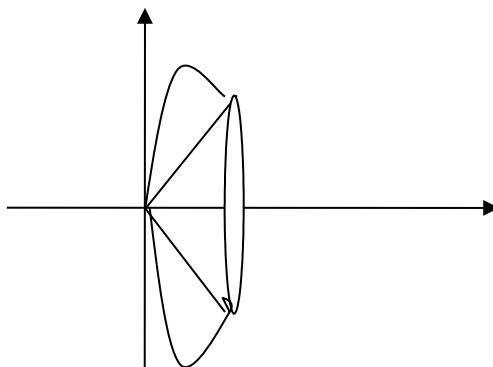
Площадь фигуры будем вычислять по формуле

$$S = \int_a^b (y_1 - y_2) dx = \int_0^1 (5x - 3x^2 - 2x) dx = \int_0^1 3x dx - \int_0^1 3x^2 dx = \left(3 \frac{x^2}{2} - 3 \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{3}{2} - 1 = 0,5 \text{ (кв.ед.)}.$$

2. Вычислить объем тела вращения, полученного при вращении фигуры, лежащей в плоскости XOY и ограниченной заданными линиями, вокруг оси OX. Сделать чертеж. $y = 4x - 2x^2$; $y = x$.

Решение.

Построим линии.



Объем тела вращения находится по формуле $V_{м.вр.} = \pi \int_a^b y^2 dx$.

$$V_{м.вр.} = \pi \int_0^{1,5} ((4x - 2x^2)^2 - x^2) dx = \pi \int_0^{1,5} (15x^2 - 16x^3 + 4x^4) dx = \pi \left(15 \frac{x^3}{3} - 16 \frac{x^4}{4} + 4 \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^{1,5} = \pi (5 \cdot 1,5^3 - 4 \cdot 1,5^4) \text{ (куб.ед.)}$$

3. Найти длину дуги параболы $y = \frac{x^2}{2}$ между точками $O(0; 0)$ и $A\left(\sqrt{3}; \frac{3}{2}\right)$.

Решение.

Дифференцируя уравнение параболы, получим $\frac{dy}{dx} = x$. Вычислим длину

$$\text{дуги по формуле: } L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1 + x^2} dx = \left[\frac{1}{2} x \sqrt{1 + x^2} + \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) \right]_0^{\sqrt{3}} \approx 2,4 \text{ (ед. дл.)}$$

4. Найти площадь поверхности шара, образованного вращением окружности $x^2 + y^2 = r$ вокруг оси Ox .

Решение.

Дифференцируя уравнение окружности $x^2 + y^2 = r$, получим $2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$, $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$.

Найдем дифференциал дуги:

$$dl = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{y}\right)^2} dx = \sqrt{\frac{y^2 + x^2}{y^2}} dx = \frac{r dx}{y}$$

Подставив значение дифференциала в формулу $S = \int_a^b ds = 2\pi \int_a^b y dl$ и взяв пределы интегрирования от $-r$ до r , получим

$$S = 2\pi \int_{-r}^r y \frac{rdx}{y} = 2\pi r \int_{-r}^r dx = 2\pi r x \Big|_{-r}^r = 4\pi r^2.$$

Задания для самостоятельной работы

Вычислить площадь плоской фигуры, заданной линиями, и вычислить объем тела, полученного вращением этой фигуры вокруг оси Ох или Оу, вычислить площадь поверхности тела вращения, найти длину дуги.

№ п/п	Вариант 1	№ п/п	Вариант 2
1	Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 3x^2 + x, y = 4x$. Сделать чертеж.	1	Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2x^2 - x, y = 3x$. Сделать чертеж.
2	Вычислить объем тела вращения фигуры, ограниченной линиями $y = 4x - x^2, y = 2x$, вокруг оси Ох. Сделать чертеж.	2	Вычислить объем тела вращения фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2, y = x$, вокруг оси Ох. Сделать чертеж.
3	Найти длину дуги параболы $y = x^2$ между точками $O(0; 0)$ и $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{4}\right)$	3	Найти длину дуги параболы $y = 4 - x^2$ между точками ее пересечения с осью Ох.
4	Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ох дуги окружности $(x - 4)^2 + y^2 = 36$, заключенной между точками $A(2; 4\sqrt{2})$ и $B(4; 6)$.	4	Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ох дуги окружности $(x - 3)^2 + y^2 = 25$, заключенной между точками $A(2; 4\sqrt{2})$ и $B(4; 6)$.

Вопросы для самоконтроля:

1. Что такое определенный интеграл?
2. Как строится интегральная сумма?
3. По какой формуле вычисляется определенный интеграл?
4. Каков геометрический смысл определенного интеграла?
5. Какие положения плоской фигуры вы знаете?
6. Какие формулы используются для вычисления площади фигуры?
7. По какой формуле можно вычислить объем тела вращения?
8. По какой формуле можно вычислить длину дуги?
9. По какой формуле можно вычислить площадь поверхности тела вращения?

Написать вывод по выполненной работе.

Практическая работа № 9

Решение дифференциальных уравнений первого порядка.

Цель работы: формирование навыков решения дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными и линейных дифференциальных уравнений первого порядка.

На выполнение практической работы отводится 2 часа.

Требования к выполнению практической работы:

1. Ответить на теоретические вопросы;
2. Оформить задания в тетради для практических работ.

Оборудование: микрокалькулятор, конспекты занятий, карточки-задания, учебник Богомолов Н.В. Практические занятия по математике, В.П. Григорьев, Ю.А. Дубинский Элементы высшей математики.

Методические рекомендации:

Решение уравнений с разделяющимися переменными выполнять по алгоритму:

- 1) выразить производную функции через дифференциалы dy и dx ;
- 2) члены с одинаковыми дифференциалами перенести в одну сторону равенства и вынести дифференциал за скобку;
- 3) разделить переменные;
- 4) проинтегрировать уравнение и найти общее решение;
- 5) если задано начальное условие, то найти частное решение:
 - вычислить C , подставив начальные условия x_0 и y_0 в общее решение;
 - подставить полученное значение C в общее решение и получить частное решение уравнения.

Решение линейного дифференциального уравнения первого порядка выполнять по алгоритму:

Это уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью подстановки $y = uv$, где u и v - новые функции от x .

- 1) Привести уравнение к стандартному виду $y' + f(x)y = g(x)$;
- 2) Используя подстановку $y = uv$ найти $y' = u'v + v'u$;
- 3) Подставить y и y' в уравнение;
- 4) Сгруппировать члены уравнения, вынести одну из функций u или v за скобки.
- 5) Составить первое уравнение с разделяющимися переменными, приравняв выражение в скобках к нулю $u' + f(x)u = 0$
- 6) Решить полученное уравнение и найти u .
- 7) Составить второе уравнение с разделяющимися переменными $v'u = g(x)u$ подставить в него уже найденную функцию $u(x)$.
- 8) Решить полученное дифференциальное уравнение и найти $v(x, C)$
- 9) Записать общее решение уравнения, подставив найденные функции $u(x)$ и $v(x, C)$ в замену $y = u(x)v(x, C)$.
- 10) Если заданы начальные условия, найти C , используя начальные условия и подставить ее в общее решение, полученный результат будет частным решением заданного уравнения $y = u(x)v(x)$.

Задания для самостоятельной работы

Решить уравнения с разделяющимися переменными:

1. Решить уравнение: $2y^2 dy = 3x dx$
2. Решить уравнение: $xdx + ydy = 0$
 $(x^2 + 1)dy = xydx$
3. Решить уравнение: $y(\sqrt{3}) = 2$ найти его частное решение, если

4. Решить уравнение: $ydx + ctg x dy = 0$ $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1$, найти его частное решение

5. Решить уравнение: $y' = \frac{1}{\sin^2 x}$ $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, найти его частное решение.

Решить линейные дифференциальные уравнения первого порядка.

Найти общие решения уравнений:

1. $\frac{dy}{dx} - 2y - 3 = 0$,
2. $\frac{dy}{dx} + xy = x$,
3. $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^2$

Найти частные решения уравнений:

1. $\frac{dy}{dx} - \frac{3y}{x} = e^x x^3$; $y = 0$ при $x = 1$.
2. $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = \frac{1}{x^2}$ $y = 1$ при $x = 2$.
3. $\frac{dy}{dx} \cos^2 x = \tan x - y$; $y = 0$ при $x = 0$.

Вопросы для самоконтроля:

1. Какое уравнение называется дифференциальным уравнением?
2. Какое уравнение называется дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными? Запишите его общий вид.
3. Какие уравнения называются линейными дифференциальными уравнениями первого порядка, запишите его общий вид?
4. Что является решением дифференциального уравнения? общим решением, частным решением?
5. Как найти частное решение дифференциального уравнения?

Написать вывод по выполненной работе.

Практическая работа № 10

Решение дифференциальных уравнений второго порядка.

Цель работы: формирование навыков решения дифференциальных уравнений второго порядка и линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

На выполнение практической работы отводится 2 часа.

Требования к выполнению практической работы:

1. Ответить на теоретические вопросы;
2. Оформить задания в тетради для практических работ.

Оборудование: микрокалькулятор, конспекты занятий, карточки-задания, учебник Богомолов Н.В. Практические занятия по математике, В.П. Григорьев, Ю.А. Дубинский Элементы высшей математики.

Методические рекомендации:

Решение неполного дифференциального уравнения второго порядка выполнять по алгоритму:

- 1) Введем новую переменную, полагая $\frac{dy}{dx} = z$;
- 2) Подставляя новую переменную в исходное уравнение, получим уравнение с разделяющимися переменными, из которого найдем переменную z .
- 3) Подставить z в замену и найти y . Это и будет общим решением уравнения. Общее решение дифференциального уравнения второго порядка содержит две произвольные постоянные.
- 4) Если заданы начальные условия, найти C_1 и C_2 , используя начальные условия и подставить их в общее решение, полученный результат будет частным решением заданного уравнения.

Решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами выполнять по алгоритму:

Составляется характеристическое уравнение:

$k^2 + pk + q = 0$, которое получается заменой $\frac{d^2 y}{dx^2}, \frac{dy}{dx}, y$ соответствующие степени k , причем сама функция y заменяется единицей.

Тогда общее решение дифференциального уравнения строится в зависимости от корней k_1, k_2 .

I случай. Корни k_1, k_2 - действительные и различные. В этом случае общее решение уравнения имеет вид $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$.

II случай. Корни k_1, k_2 - действительные и равные: $k_1 = k_2 = k$. Тогда общее решение уравнения записывается так: $y = (C_1 + C_2 x) e^{kx}$.

III случай. Корни k_1, k_2 - комплексно-сопряженные: $k_1 = \alpha + \beta i$; $k_2 = \alpha - \beta i$. В этом случае общее решение уравнения записывается следующим образом: $y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$.

Задания для самостоятельной работы

Решить неполные дифференциальные уравнения второго порядка.

- 1) Решить уравнение: $\frac{d^2 s}{dt^2} = 6t$ $s(0) = 0$, $s'(0) = 10$, найти его частное решение;

- 2) Решить уравнение: $\frac{d^2 s}{dt^2} = 2t + 3$, $s(0) = 1$, $s'(0) = 1$, найти его частное решение.
- 3) $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy}{dx}$; $y = 2u \frac{dy}{dx} = 1$ при $x = 0$

Решить линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

1) $\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = 0$

2) $y'' - 8y' + 15y = 0$

3) $y'' + 10y' + 25y = 0$

Найти частные решения:

4) $\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 3y = 0$; $y = 8u \frac{dy}{dx} = 0$ при $x = 0$

5) $y'' - 10y' + 25y = 0$; $y = 2u y' = 8$ при $x = 0$

6) $y'' + 9y = 0$; $y = 1u y' = -6$ при $x = \frac{\pi}{3}$.

Вопросы для самоконтроля:

1. Какое уравнение называется неполным дифференциальным уравнением второго порядка? Запишите его общий вид.
2. Каким способом можно решить неполное дифференциальное уравнение второго порядка?
3. Какое уравнение называется линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами?
4. Что является решением дифференциального уравнения? общим решением, частным решением?
5. Как найти частное решение дифференциального уравнения?

Написать вывод по выполненной работе.