Комбинаторика – это раздел математики, посвящённый задачам выбора и расположения предметов из раздела множеств.

- В комбинаторике ***изучают различные комбинации элементов множества и отношения на этих множествах***.
- Слово комбинация происходит от латинского ***combino*** – соединяю.
- Первым термин «Комбинаторика» ввел Лейбниц, который в 1666 году опубликовал большой труд «Рассуждения о комбинаторном искусстве».
- Типичной задачей комбинаторики является задача перечисления комбинаций, составленных из нескольких предметов

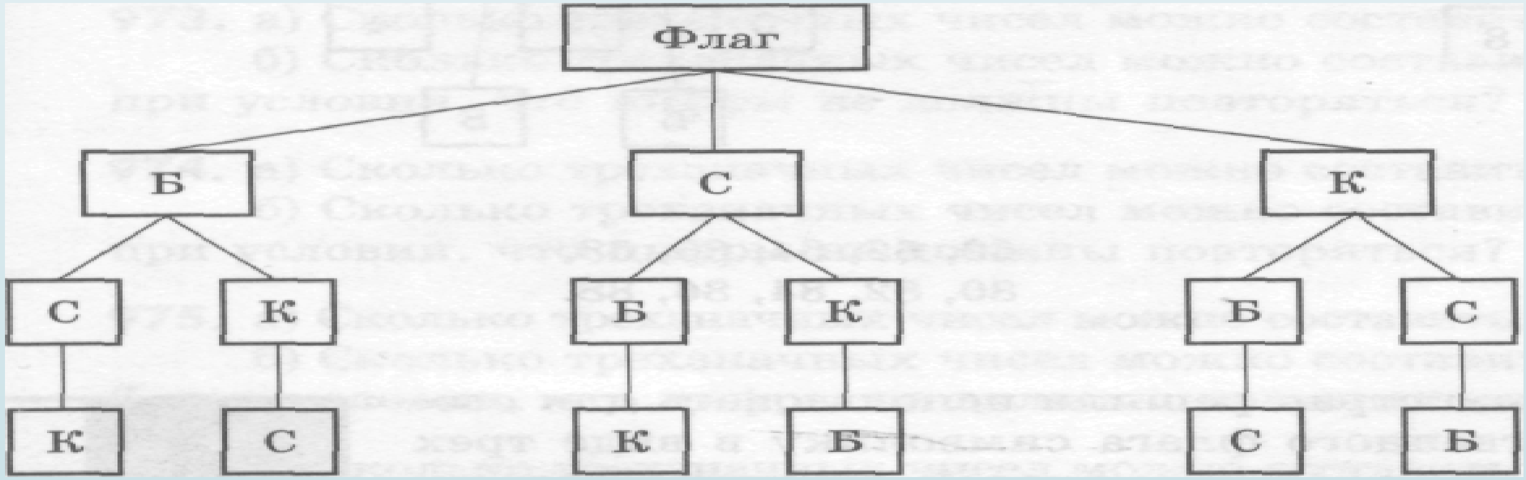
Примеры комбинаторных задач:

- 1. Несколько стран в качестве символа своего государства решили использовать флаг в виде 3-х горизонтальных полос одинаковых по ширине и цвету: синий, красный и белый. **Сколько стран** могут испытать такую символику при условии, что у каждой страны свой отличный от других флаг?
- 2 .На завтрак Вова может выбрать плюшку, бутерброд или кекс, а запить их может чаем, соком или кефиром. **Какое количество** вариантов завтрака Вова может выбрать?
- 3. Петя может доехать до школы четырьмя способами: на трамвае, на автобусе, на троллейбусе и маршрутке. Оплатить можно тремя способами проезд, купив билет на остановке, купив билет у кондуктора и воспользоваться проездным. **Сколько** существует всего **комбинаций** проезда и оплаты у Пети?
- 4. **Сколько** пятизначных **чисел** можно составить из цифр 1,3,5,7,9 , в которых ни одна цифра не может повторяться?

Способы решения комбинаторных задач:
1. При помощи дерева возможных вариантов.

Несколько стран в качестве символа своего государства решили использовать флаг в виде 3-х горизонтальных полос одинаковых по ширине и цвету: синий, красный и белый. **Сколько** стран могут испытать такую символику при условии, что у каждой страны свой отличный от других флаг?

Будем искать решение с помощью дерева возможных вариантов.



Ответ : 6 стран

Способы решения комбинаторных задач:
2. При помощи перебора всевозможных вариантов.

На празднике Сабантуй гостям в юрте предлагают выбрать учпочмак, вак-беляш или губадию, а запить их можно чаем, кумысом или айраном. **Какое количество** вариантов угощений могут выбрать гости?

Решим задачу, перебирая всевозможные варианты, путем кодирования вариантов завтрака.

Решение:	УЧ	ВЧ	ГЧ
	УК	ВК	ГК
	УА	ВА	ГА

Ответ: 9 вариантов.

Способы решения комбинаторных задач:
3. При помощи таблицы возможных вариантов.

Петя может доехать до школы четырьмя способами: на трамвае, на автобусе, на троллейбусе и маршрутке. Оплатить можно тремя способами проезд, купив билет на остановке, купив билет у кондуктора и воспользоваться проездным. **Сколько** существует всего комбинаций проезда и оплаты у Пети?

С помощью таблицы рассмотрим все возможные комбинации.

	Трамвай	*Автобус*	*Троллейбус*	*Маршрутка*
Оплата на остановке	Трамвай, Оплата на остановке	Автобус, Оплата на остановке	Троллейбус, Оплата на остановке	Маршрутка, Оплата на остановке
Оплата кондуктору	Трамвай, Оплата кондуктору	Автобус, Оплата кондуктору	Троллейбус, Оплата кондуктору	Маршрутка, Оплата кондуктору
Проездной	Трамвай, Проездной	Автобус, Проездной	Троллейбус, Проездной	Маршрутка, Проездной

Ответ: 12 вариантов.

Способы решения комбинаторных задач:
4. Способом умножения возможных вариантов.

- **Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 1,3,5,7,9 , в которых ни одна цифра не может повторяться?**

Рассмотрим все возможные комбинации: на 1первом месте может стоять любая из 5 цифр, на втором - любая из 4 оставшихся, на 3-м – любая из 3 оставшихся, на 4-м – любая из 2 оставшихся, на 5м месте – последняя оставшаяся цифра. В результате получаем произведение

Рассмотрим все возможные комбинации: на 1 первом месте может стоять любая из 5 цифр, на втором - любая из 4 оставшихся, на 3-м – любая из 3 оставшихся, на 4-м – любая из 2 оставшихся, на 5м месте – последняя оставшаяся цифра. В результате получаем произведение

5 4 3 2 1=120 или 1 2 3 4 5=120

$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1=120$ или $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5=120$

Ответ: 120 чисел.

Ответ: 120 чисел.

Понятие факториала.

Правило умножения приводит к важному понятию факториала.

Определение. Произведение всех первых натуральных чисел от 1 до n включительно обозначают n! (n факториал)

- ***n!=1·2·…·(n-1)·n, причем 0!=1***

Заметим ***важное свойство факториала***:

n!= (n-1)!·n

Данное свойство значительно упрощает решение задач, где присутствует факториал. Например, для вычисления задач вот такого типа: $\frac{4!\cdot 10!}{8!\cdot 3!}$

Совсем необязательно вычислять все факториалы.

Можно все переписать вот в таком виде: $\frac{3!\cdot 4\cdot 8!\cdot 9\cdot 10}{8!\cdot 3!}$

Примеры заданий с факториалами.

- 1) Вычислите:

- 1) Вычислите:

$$\frac{8!}{6!\cdot 2!} = \frac{6!\cdot 7\cdot 8}{6!\cdot 2} = 7\cdot 4 = 28.$$

- 2) Найдите значение выражения:

- 2) Найдите значение выражения:

$$\frac{P_6 - P_4}{P_5} = \frac{6! - 4!}{5!} = \frac{4!\cdot 5\cdot 6 - 4!}{5!} = \frac{4!\cdot(5\cdot 6 - 1)}{4!\cdot 5} = \frac{29}{5} = 5{,}8.$$

- 3) Сократите дробь:

- 3) Сократите дробь:

$$\frac{(n+1)!(n+3)}{(n+4)!} = \frac{(n+1)!(n+3)}{(n+1)!\cdot(n+2)\cdot(n+3)\cdot(n+4)} = \frac{1}{(n+2)(n+3)}.$$

Перестановки

- ***Перестановками*** называют комбинации, состоящие из одних и тех же **n различных** объектов и отличающиеся только порядком их расположения.
- Количество всех возможных перестановок выражается формулой $P_n = n!$
- Отличительной особенностью перестановок является то, что в каждой из них участвует **ВСЁ** множество, то есть, **все** n объектов.
- **Пример:** дружная семья из 5 человек.
- **Решим задачу:** Сколькими способами можно рассадить 5 человек за столом?
- **Решение**: используем формулу количества перестановок $P_n = n!$

$$P_5 = 5! = 120$$

Ответ: 120 способами

Сочетания

- ***Сочетаниями*** называют различные комбинации из **n** объектов, которые выбраны из множества **m** различных объектов, и которые отличаются друг от друга хотя бы одним объектом. Иными словами, отдельно взятое сочетание – это уникальная выборка из **n** элементов, в которой <u>не важен их порядок</u> (расположение).
- **Пример:** составление букета из трех гвоздик, выбранных из 5 гвоздик разного цвета.
- Общее количество таких уникальных сочетаний рассчитывается по формуле: $C_m^n = \frac{m!}{n!\cdot(m-n)!}$
- **Решим задачу:** В ящике находится 15 деталей. Сколькими способами можно взять 4 детали?
- **Решение:** В этой задаче не важно, какие детали лежат в ящике, все они имеют **равный статус**, поэтому речь идет о сочетании C_{15}^4. Вычислим
- $C_{15}^4 = \frac{15!}{4!\cdot(15-4)!} = \frac{15!}{4!\cdot11!} = \frac{11!\cdot12\cdot13\cdot14\cdot15}{4!\cdot11!} = \frac{12\cdot13\cdot14\cdot15}{24} = 13\cdot7\cdot15 = 1365$

Ответ: 1365

Размещения

- ***Размещениями*** называют различные комбинации из n объектов, которые выбраны из множества m различных объектов, и которые отличаются друг от друга как составом объектов в выборке, так и их порядком.
- **Пример:** Выбор тренером 4 бегунов из 12 для участия в эстафете 4*100 м, с учетом того, кто побежит на 1-м, 2-м, 3-м и 4-м этапах.(**разные статусы!**)
- Количество размещений рассчитывается по формуле .
- **Решим задачу:** В студенческой группе 23 человека. Сколькими способами можно выбрать старосту и его заместителя?
- **Решение:** В задаче идет речь о людях, имеющих **разный статус**, поэтому найдем число размещений . Учитывая, что , имеем = = = 506

Ответ: 120 способами

- ***Размещениями*** называют различные комбинации из n объектов, которые выбраны из множества m различных объектов, и которые отличаются друг от друга как составом объектов в выборке, так и их порядком.
- **Пример:** Выбор тренером 4 бегунов из 12 для участия в эстафете 4*100 м, с учетом того, кто побежит на 1-м, 2-м, 3-м и 4-м этапах.(**разные статусы!**)
- Количество размещений рассчитывается по формуле $A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$.
- **Решим задачу:** В студенческой группе 23 человека. Сколькими способами можно выбрать старосту и его заместителя?
- **Решение:** В задаче идет речь о людях, имеющих **разный статус**, поэтому найдем число размещений A_{23}^2. Учитывая, что $A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$, имеем $A_{23}^2 = \frac{23!}{(23-2)!} = \frac{23!}{21!} = \frac{21! \cdot 22 \cdot 23}{21!} = 506$

Ответ: 120 способами

Комбинированные задания

- **Решим задачу:** В отделе работают 5 ведущих и 8 старших научных сотрудников. В командировку нужно послать двух ведущих и трех старших научных сотрудников. Сколькими способами может быть сделан выбор сотрудников?
- **Решение:** В задаче идет речь о **сочетаниях**, так как в каждой группе все сотрудники имеют **равный статус**. Поэтому количество способов выбора ведущих сотрудников равно C_5^2, а количество способов выбора старших сотрудников равно C_8^3. Общее же число способов согласно правила умножения равно:
- $C_5^2 \cdot C_8^3 = \frac{5!}{2!\ (5-3)!} \cdot \frac{8!}{3!\ (8-3)!} = \frac{5!}{2!\cdot 3!} \cdot \frac{8!}{3!\cdot 5!} = \frac{3!\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{2!\cdot 3!\cdot 3!} = 2\cdot 5\cdot 7\cdot 8 = 560$

==2 5 7 8=560

или при помощи треугольника Паскаля:

или при помощи треугольника Паскаля:

- =10 56=560
- $C_5^2 \cdot C_8^3 = 10\cdot 56 = 560$

Ответ: 560 способов.

Ответ: 560 способов.

Комбинаторные уравнения

- **Решим задачу**: Из группы туристов требуется выбрать дежурного и его помощника. Если бы туристов было на одного больше, то возможностей выбора было бы в 1.25 раза больше. Сколько туристов в группе?
- **Решение**: Пусть в группе n туристов. В данной задаче дежурный и его помощник имеют **разный статус**. Значит, речь идет о **размещениях** A_n^2 и A_{n+1}^2, откуда имеем комбинаторное уравнение:
- $1{,}25A_n^2 = A_{n+1}^2$, учитывая, что $A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$, имеем
- $1{,}25 \cdot \frac{n!}{(n-2)!} = \frac{(n+1)!}{(n-1)!}$, **понизим факториал**
- $1{,}25 \cdot \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = \frac{(n+1)n(n-1)!}{(n-1)!}$, после сокращения
- $1{,}25n(n-1) = (n+1)n$, откуда
- $0{,}25n^2 - 2{,}25n = 0$, решая уравнение получим
- $n_1 = 0$, (не уд., так как n – натуральное), $n_2 = 9$

Ответ: 9

Комбинаторные уравнения

- **Решим задачу:** На плоскости отметили несколько точек, никакие три из них не лежат на одной прямой. Через каждые две точки провели прямую. Сколько точек было отмечено, если было проведено 36 прямых?
- **Решение:** Пусть было n точек. Очевидно, что речь идет о сочетании C_n^2, откуда $C_n^2 = 36$. Учитывая, что $C_m^n = \frac{m!}{n!\cdot(m-n)!}$, имеем
- $\frac{n!}{2\cdot(n-2)!}$=36, **понизим факториал**
- $\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!}$ =36, сократим на $(n-2)!$
- $n^2 - n - 72 = 0$, откуда
- $n_1 = -8, (\text{не уд., так как n } - \text{натуральное}), n_2$ =9.

Ответ: 9

Комбинаторные уравнения

- C_{3x+1}^{3x-1} =120, учитывая, что $C_m^n = \frac{m!}{n!\cdot(m-n)!}$, получаем
- $\frac{(3x+1)!}{(3x-1)!\cdot(3x+1-3x+1)!}$=120, откуда
- $\frac{(3x+1)!}{(3x-1)!\cdot 2!}$=120, **понизим факториал**
- $\frac{(3x-1)!\cdot 3x\cdot(3x+1)}{(3x-1)!\cdot 2}$=120, сократим на (3x-1)! и умножим на 2:
- (3x+1) · 3x=240, откуда
- $9x^2$+3x-240=0, решая уравнение, получим $x_1 = -5\frac{1}{3}$ (не уд., так как x – натуральное число) , $x_2 = 5$

Ответ: 5

- 120, учитывая, что получаем
- =120, откуда
- =120, **понизим факториал**
- =120, сократим на (3x-1)! и умножим на 2:
- (3x+1) 3x=240, откуда
- 9+3x-240=0, решая уравнение, получим (не уд., так как x – натуральное число)

Ответ: 5

Комбинаторные уравнения

- $A_n^3 - 2 \cdot C_n^4 = 3 \cdot A_n^2$, учитывая, что $C_m^n = \frac{m!}{n! \cdot (m-n)!}$ и $A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$, получаем
- $\frac{n!}{(n-3)!} - 2 \cdot \frac{n!}{4! \cdot (n-4)!} = 3 \cdot \frac{n!}{(n-2)!}$, сократим уравнение на n!
- $\frac{1}{(n-3)!} - 2 \cdot \frac{1}{4! \cdot (n-4)!} = 3 \cdot \frac{1}{(n-2)!}$, **понизим факториал**
- $\frac{1}{(n-3)(n-4)!} - 2 \cdot \frac{1}{4! \cdot (n-4)!} = 3 \cdot \frac{1}{(n-2)(n-3)(n-4)!}$, умножим уравнение на $(n-4)!$
- $\frac{1}{(n-3)} - \frac{1}{12} = \frac{3}{(n-2)(n-3)}$, откуда
- n^2-17n+66=0
- $n_1 = 6,\ n_2 =$11

Ответ: 6; 11.

Комбинаторика и ее виды

- Комбинаторная задача не является только лишь школьным материалом, студенты вузов также изучают ее. В науке существует несколько видов комбинаторики, и у каждого из них имеется собственная миссия.
- Перечислительная комбинаторика должна рассматривать задачи на перечисление и подсчет возможных конфигураций с дополнительными условиями.
- Структурная комбинаторика является компонентом вузовской программы, в ней изучаются теории матроидов и графов.
- Экстремальная комбинаторика также имеет отношение к вузовскому материалу, и здесь имеются свои индивидуальные ограничения.
- Еще один раздел – теория Рамсея, занимающаяся изучением структур в случайных вариациях элементов.
- Существует и лингвистическая комбинаторика, которая занимается рассмотрением вопроса о сочетаемости тех или иных элементов между собой.

Комбинаторика – наука будущего?

- Многие специалисты в области математики и физики считают, что именно комбинаторная задача может стать толчком в развитии всех технических наук. Достаточно лишь нестандартно подойти к решению тех или иных проблем, и тогда можно будет ответить на вопросы, которые уже несколько веков не дают покоя ученым. Некоторые из них всерьез утверждают, что комбинаторика является подспорьем для всех современных наук, особенно космонавтики. Намного проще будет высчитывать траектории полета кораблей с помощью комбинаторных задач, также они позволят определить точное нахождение тех или иных небесных светил.
- Реализация нестандартного подхода уже давно началась в азиатских странах, там ученики даже элементарные задачи по умножению, вычитанию, сложению и делению решают, используя комбинаторные методы. На удивление многих европейских ученых, методика действительно работает. Школы Европы пока что только начали перенимать опыт своих коллег. Когда именно комбинаторика станет одним из основных разделов математики, предположить сложно. Сейчас наука изучается ведущими учеными планеты, которые стремятся популяризировать ее.

Благодарю за внимание!

Треугольник Паскаля

0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1
7	1 7 21 35 35 21 7 1
8	1 8 28 56 70 56 28 8 1

……………………………………..